$\mathbb{TFJM}^2$

Problèmes du 8ème Tournoi Français des Jeunes Mathématiciennes et Mathématiciens

VERSION 1.2 MISE À JOUR LE 15 JANVIER 2018

Préambule

Ces problèmes sont proposés dans le cadre du Tournoi Français des Jeunes Mathématiciennes et Mathématiciens. Ce sont des problèmes difficiles, proposés par des chercheur·se·s et étudiant·e·s en mathématiques. Ils n'admettent pas toujours, à la connaissance du jury, de solution complète, mais sont accessibles à des lycéen·ne·s, c'est-à-dire que les auteur·e·s sont certain·e·s qu'un travail de recherche élémentaire peut être mené sur ces problèmes. Le jury n'attend pas des participant·e·s qu'elles/ils résolvent entièrement un problème, mais qu'elles/ils en comprennent les enjeux, résolvent des cas particuliers, repèrent les difficultés et proposent des pistes de recherche. Attention, les questions ne sont pas toujours classées par ordre croissant de difficulté. Enfin, il n'est pas nécessaire de traiter tous les problèmes : chaque équipe peut en refuser un certain nombre sans pénalité. On se reportera au règlement pour plus de détails.

 En cas de questions concernant le tournoi ou les énoncés, consulter le site `www.tfjm.org` ou contacter les organisateurs à l'adresse `contact@tfjm.org`.

Table des matières

Mots-clés : 1. combinatoire — 2. arithmétique — 3. jeux — 4. probabilités — 5. géométrie — 6. jeux — 7. combinatoire, arithmétique — 8. optimisation, combinatoire — 9. jeux.

Notations

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$	ensemble des entiers naturels
$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}$	ensemble des entiers naturels non nuls
$\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$	ensembles des entiers relatifs et des nombres réels
$\mathbb{Z}^2$	ensemble des couples d'entiers relatifs
$[a, b]$	intervalle fermé de $\mathbb{R}$

1. Puzzles

Nicolas conçoit des pièces de puzzle. Ses pièces sont des carrés de côté 1 cm. Sur chaque côté d'une pièce, il peut choisir soit de laisser le bord droit, soit d'ajouter une bosse, soit de tailler un creux. Il n'y a (pour le début du problème) qu'une seule forme de bosse et une seule forme de creux, qui sont complémentaires.

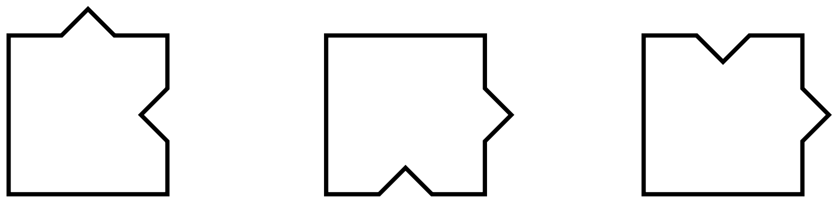

FIGURE 1. Les trois pièces ci-dessus sont distinctes ; les pièces à gauche et au centre sont identiques à rotation près ; les pièces au centre et à droite sont identiques à un retournement (c'est-à-dire une symétrie axiale) près.

1. Combien de pièces distinctes (voir Figure 1) existe-t-il :

a) en n'autorisant ni rotation, ni retournement ?

b) si on s'autorise à tourner les pièces mais pas à les retourner ?

c) si on s'autorise à tourner et à retourner les pièces ?

On appelle *puzzle* de taille $m \times n$ un ensemble de mn pièces qu'il est possible d'assembler, en forme de rectangle de m centimètres de long et n centimètres de large, sans les tourner ni les retourner, de sorte que chaque creux s'emboîte dans une bosse et réciproquement, et que les côtés plats soient uniquement sur le bord du rectangle. On dit qu'un puzzle est *distingué* lorsqu'il existe une unique façon d'assembler les mn pièces pour former un rectangle $m \times n$ avec les contraintes ci-dessus, à un échange de pièces identiques près.

2. Pour quels couples d'entiers positifs (m, n) peut-on :

a) trouver un puzzle distingué de taille $m \times n$?

b) trouver un puzzle non distingué de taille $m \times n$?

On dit qu'un puzzle est *singulier* s'il ne comporte pas deux pièces identiques.

3. Quel est le nombre maximal de pièces que peut contenir un puzzle singulier ?

4. Reprendre la question **2** si l'on impose que le puzzle soit singulier.

5. Soit un entier $k \in \mathbb{N}^*$ fixé. On autorise maintenant k formes de creux et autant de formes correspondantes de bosses, de sorte qu'une bosse ne puisse s'encastrer que dans un creux de la forme complémentaire. Reprendre les questions précédentes.

6. Reprendre les questions précédentes si l'on est désormais autorisé à tourner les pièces (mais pas à les retourner).

7. Proposer et étudier d'autres directions de recherche.

2. Plus rapide qu'Euclide ?

Morgane veut calculer le plus grand diviseur commun à deux entiers a et b, avec $a \geqslant b \geqslant 1$. Pour cela, elle utilise l'algorithme d'Euclide classique, où l'on note $r(x, y)$ le reste de la division euclidienne de x par y :

```
i ← 0
(u_{-1}, u_0) ← (a, b)
Tant que u_i ⩾ 1 :
    i ← i + 1
    u_i ← r(u_{i-2}, u_{i-1})
On retourne u_{i-1}.
```

Par exemple, pour calculer le PGCD de $a = 34$ et $b = 21$, Morgane calcule successivement $u_1 = r(34, 21) = 13$, $u_2 = r(21, 13) = 8$, $u_3 = r(13, 8) = 5$, $u_4 = r(8, 5) = 3$, $u_5 = r(5, 3) = 2$, $u_6 = r(3, 2) = 1$ et $u_7 = r(2, 1) = 0$. Le PGCD est bien 1. On note $f(a, b)$ la valeur de i à la fin de l'algorithme, c'est-à-dire le nombre de divisions euclidiennes effectuées pour calculer le PGCD de a et b. Dans l'exemple, on a $f(34, 21) = 7$.

D'autre part, on dit qu'un couple (a, b) d'entiers est strictement plus petit qu'un autre couple (a', b') pour l'*ordre lexicographique* si soit $a < a'$, soit $a = a'$ et $b < b'$.

1. Pour un entier k fixé, quel est le plus petit couple (a, b), pour l'ordre lexicographique, tel que $f(a, b) = k$?

Morgane ne manque pas d'astuce : plutôt que de n'utiliser que les deux derniers résultats u_{i-2} et u_{i-1} pour calculer u_i, elle s'autorise à choisir deux valeurs précédentes de la suite u et de faire le reste de la division euclidienne de l'une par l'autre. C'est-à-dire que pour calculer u_i elle peut choisir deux entiers j_1 et j_2 tels que $-1 \leqslant j_1, j_2 < i$ et calculer $u_i = r(u_{j_1}, u_{j_2})$. Elle s'arrête dès qu'il existe un nombre d pour lequel elle a divisé à la fois a et b par d, et a calculé $r(a, d) = r(b, d) = 0$. Morgane affirme alors que d est le PGCD de a et b.

Par exemple, pour calculer le PGCD de $a = u_{-1} = 34$ et $b = u_0 = 21$, Morgane peut calculer successivement $u_1 = r(34, 21) = 13$, $u_2 = r(21, 13) = 8$, $u_3 = r(13, 8) = 5$, $u_4 = r(21, 5) = 1$, $u_5 = r(34, 1) = 0$ et $u_6 = r(21, 1) = 0$; elle affirme alors que 1 est le PGCD de 34 et 21.

2. Dans le cas général, c'est-à-dire pour toutes les valeurs possibles de $a \geqslant b \geqslant 1$, l'affirmation de Morgane est-elle toujours correcte ?

3. Dans le cas général, est-il suffisant de vérifier que $r(a, d) = 0$ ou que $r(b, d) = 0$ pour affirmer que d est le PGCD de a et b ?

On note $g(a, b)$ le nombre minimal de divisions euclidiennes que devra effectuer Morgane avec cette méthode, y compris les deux divisions de a et b par d. L'exemple ci-dessus montre donc que $g(34, 21) \leqslant 6$.

4. Calculer $g(34, 21)$.

5. Existe-t-il un entier relatif A tel que l'on ait nécessairement $g(a, b) \leqslant f(a, b) + A$? Si oui, donner le plus petit entier A possible.

6. Donner des conditions nécessaires et des conditions suffisantes sur le couple (a, b) pour que $g(a, b) > f(a, b)$; pour que $g(a, b) \geqslant f(a, b)$.

7. Pour quels entiers $A \geqslant 1$ existe-t-il des entiers $a \geqslant b \geqslant 1$ tels que $g(a, b) + A \leqslant f(a, b)$? Et tels que $g(a, b) \times A \leqslant f(a, b)$?

8. À k fixé, quel est le plus petit couple (a, b), pour l'ordre lexicographique, tel que $g(a, b) = k$? Dans un premier temps, on pourra chercher à encadrer a en fonction de k.

9. Proposer et étudier d'autres directions de recherche.

3. Vue sur la mer

Dans la station balnéaire de Vecteur-les-Bains, la concurrence entre promoteurs immobiliers fait rage. Chacun veut construire des immeubles offrant le plus d'étages possibles avec vue sur la mer.

On fixe deux entiers n et k tels que $1 \leqslant k \leqslant n$. Cécile et Eva s'affrontent pour construire des immeubles sur un terrain comportant n emplacements, numérotés de 1 à n. L'emplacement 1 est situé au bord de la mer, l'emplacement 2 est juste derrière, et ainsi de suite jusqu'à l'emplacement n. La législation est très stricte : sur l'emplacement i, on a uniquement le droit de construire un immeuble d'exactement i étages. Un étage d'un immeuble permet de voir la mer si et seulement si aucun autre immeuble entre celui-ci et la mer n'atteint la hauteur de cet étage (voir Figure 2).

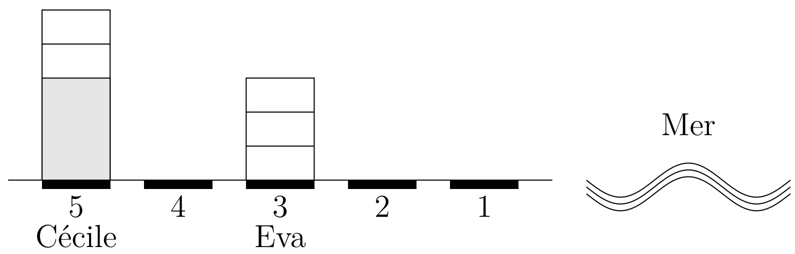

Figure 2. Sur la figure ci-dessus, Cécile a construit un immeuble sur l'emplacement 5, et Eva un immeuble sur l'emplacement 3. Les trois étages de l'immeuble d'Eva ont vue sur la mer, tout comme les deux étages les plus élevés de l'immeuble de Cécile (les trois autres ont la vue bouchée par l'immeuble d'Eva).

Cécile place un premier immeuble sur l'emplacement de son choix, puis Eva en place un sur un autre emplacement, puis Cécile en replace un, et ainsi de suite jusqu'à ce que k immeubles aient été placés au total. Pour chaque promotrice, on dit que son *score* est le nombre d'étages de ses constructions qui permettent de voir la mer et son *avantage* est la différence entre son score et celui de l'autre.

1. Quel est le meilleur avantage que Cécile peut s'assurer lorsque :

a) $k = 1, 2, 3$?

b) $k = n, n-1$?

c) k est quelconque ?

2. Cécile et Eva ont fait la paix : chacune essaie désormais de maximiser son score personnel, sans se préoccuper de celui de l'autre. Lorsqu'une promotrice a plusieurs manières de s'assurer le même score, elle choisit celle qui donne le plus haut score final à l'autre.

a) Quel est le plus grand score que Cécile peut s'assurer ? On pourra commencer par étudier les mêmes valeurs particulières de k que dans la question **1**.

b) Même question pour Eva.

3. La législation change. Deux entiers naturels k_C et k_E sont fixés tels que $k_C + k_E \leqslant n$. Cécile et Eva jouent respectivement k_C et k_E coups, dans un ordre décidé par la loi. Reprendre les questions précédentes lorsque :

a) $k_E = 1$, k_C est quelconque et Eva joue après que Cécile a placé ses k_C immeubles,

b) k_C et k_E sont quelconques, Cécile place ses k_C immeubles puis Eva place ses k_E immeubles,

c) k_C et k_E sont quelconques et Cécile choisit l'ordre dans lequel les deux jouent.

4. À cause du réchauffement climatique, le niveau de la mer a augmenté et Vecteur-les-Bains est devenue une île. Elle est désormais constituée d'une rangée de $2n-1$ parcelles de terrain et est bordée par la mer des deux côtés. À une distance k du bras de mer le plus proche, on peut construire un immeuble de taille k (voir Figure 3). Chaque étage est séparé en 2 appartements (un à gauche et un à droite) et le score d'une promotrice est le nombre d'appartements de ses constructions qui permettent de voir la mer. Reprendre les questions précédentes dans ce cadre.

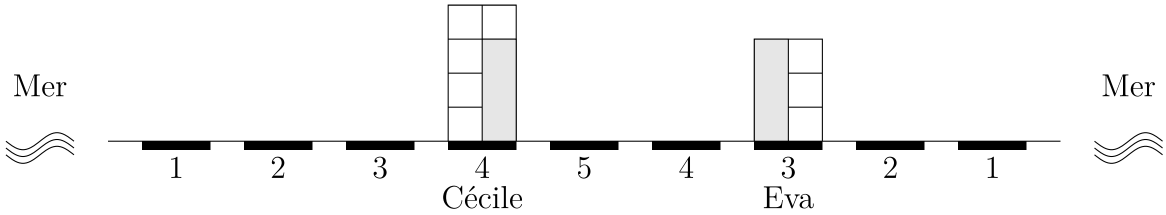

Figure 3. Sur la figure ci-dessus, le score de Cécile est 5 : quatre appartements voient la mer à gauche et un à droite. Celui d'Eva est 3 : trois appartements voient la mer à droite.

5. Proposer et étudier d'autres directions de recherche.

* * *

4. Galettes des rois

À la galette des rois du lycée, il y a n galettes numérotées de 1 à n, chacune découpée en k parts, où k et n sont deux entiers $\geqslant 1$. Chaque galette contient initialement une seule fève. Guillaume est en retard : quand il arrive, pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, il reste a_i parts dans la galette i. On suppose que tous ceux qui ont pris une part l'ont choisie uniformément au hasard dans une des galettes. On note L le nombre de fèves qui ont été trouvées avant que Guillaume n'arrive. On suppose $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n$.

1. Calculer $\mathbb{P}(L = \ell)$ pour tout entier $\ell \geqslant 0$. Combien vaut l'espérance de L ?

2. En prenant une part au hasard dans la galette i, quelle est la probabilité que Guillaume trouve une fève ? Dans quelle galette doit-il piocher pour maximiser ses chances de trouver la fève ?

Thomas, qui est là depuis le début, indique à Guillaume que ℓ fèves ont été trouvées jusqu'à présent, avec $0 \leqslant \ell \leqslant n-1$.

3. En fonction de ℓ, dans quelle galette Guillaume doit-il prendre une part pour avoir le plus de chances de trouver une fève ? Quelle est alors la probabilité qu'il en trouve une ? On pourra traiter les cas suivants :

a) $n = 2$,
b) $n = 3$,
c) $\ell = 0$,
d) $\ell = 1$,
e) $\ell = n-1$,
f) n, ℓ quelconques, mais toutes les galettes entamées contiennent le même nombre de parts,
g) $k = n$ et $a_i = i$ pour tout i,
h) n, ℓ quelconques.

4. Dans cette question, on suppose que $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$. On dit qu'une galette i est *inutile* si, quelle que soit la valeur ℓ donnée par Thomas, la galette i ne sera pas celle où Guillaume a le plus de chances de trouver une fève. En fonction de n, est-il possible qu'aucune galette ne soit inutile ? Que toutes les galettes sauf une soient inutiles ? Quels sont les nombres possibles de galettes inutiles ?

5. Guillaume a très faim et a peur qu'il y ait moins à manger dans les parts contenant des fèves. Il veut donc avoir le moins de chances possibles d'en trouver. Reprendre les questions **3** et **4** dans ce cadre.

6. Proposer et étudier d'autres directions de recherche.

* * *

5. Chaîne rouillée

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \in [0, \pi]$. Colin se distrait en jouant avec une chaîne rouillée. La chaîne est une suite de points $A_0, \ldots, A_n$, reliés par des maillons de longueur 1. Autrement dit, pour tout $0 \leqslant i \leqslant n-1$, on a $A_iA_{i+1} = 1$ (les segments $[A_iA_{i+1}]$ peuvent éventuellement se croiser). Elle est fixée à un point A_0. La chaîne étant rouillée, l'angle entre deux maillons consécutifs ne peut prendre que certaines valeurs. Ainsi, pour tout $1 \leqslant i \leqslant n-1$, l'angle orienté $\left(\overrightarrow{A_{i-1}A_i}, \overrightarrow{A_iA_{i+1}}\right)$ doit rester dans l'intervalle $[-\alpha, \alpha]$ (voir Figure 4). On note $\mathcal{B}_n^\alpha$ l'ensemble des points qui peuvent être atteints par l'extrémité A_n de la chaîne.

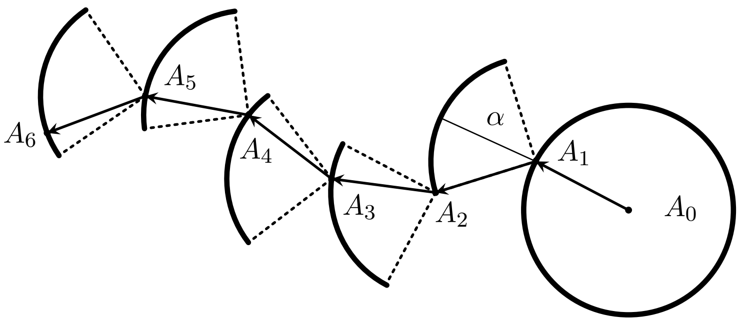

FIGURE 4. Illustration d'une chaîne dont les angles sont bloqués entre $-\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{4}$ avec $n = 6$. Les arcs de cercle représentent les angles possibles pour chaque maillon.

1. En fonction de n et de α, a-t-on $A_0 \in \mathcal{B}_n^\alpha$? On pourra étudier les cas suivants :

a) $\alpha = \pi$ (chaîne non rouillée),
b) $\alpha = \frac{\pi}{2}$,
c) $n = 2$,
d) $n = 3$,
e) n, α quelconques.

2. Décrire $\mathcal{B}_n^\alpha$ le plus précisément possible et calculer son aire dans les différents cas de la question **1**.

Dans les questions **3** et **4**, on suppose que le point A_1 de la chaîne est également fixé, à distance 1 de A_0. On note $\mathcal{C}_n^\alpha$ l'ensemble des points que peut atteindre l'autre extrémité A_n de la chaîne.

3. Décrire $\mathcal{C}_n^\alpha$ dans les mêmes cas que pour la question **1**.

4. En fonction de n et de α, quelles sont les valeurs possibles de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_1A_n}\right)$? Est-il vrai que pour tous points $X, Y \in \mathcal{C}_n^\alpha$ tels que $A_1X = A_1Y$, il existe un arc de cercle centré en A_1 entre X et Y qui est intégralement inclus dans $\mathcal{C}_n^\alpha$?

5. Soit $\varepsilon \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Lassé de sa première chaîne rouillée, Colin en trouve une autre, bloquée avec des angles proches de $\frac{\pi}{2}$. Plus précisément, pour tout $1 \leqslant i \leqslant n-1$, l'angle orienté $\left(\overrightarrow{A_{i-1}A_i}, \overrightarrow{A_iA_{i+1}}\right)$ doit rester dans $I_\varepsilon = \left[\frac{\pi}{2} - \varepsilon, \frac{\pi}{2} + \varepsilon\right] \cup \left[-\frac{\pi}{2} - \varepsilon, -\frac{\pi}{2} + \varepsilon\right]$. Reprendre les questions **1** à **3** dans ce cadre.

6. Proposer et étudier d'autres directions de recherche.

6. Bataille corsée

Igor et Sophia jouent aux cartes. Ils décident de modifier les règles de la bataille, jeu trop peu stratégique à leur goût. Pour ce faire, ils disposent d'un jeu de $2n$ cartes numérotées de 1 à $2n$, pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$. Au début de la partie, Igor a les cartes impaires et Sophia les cartes paires. Le jeu dure n tours. À chaque tour, l'un des deux joueurs choisit de jouer une de ses cartes, puis l'autre fait de même. Celui qui a joué la carte avec le numéro le plus élevé marque un point, et les deux cartes sont défaussées.

1. Igor et Sophia essaient les différentes règles du jeu suivantes. Pour chacune de ces règles, quel est le plus grand nombre de points qu'Igor peut s'assurer de marquer ? On pourra commencer par étudier de petites valeurs de n.

a) Igor commence à chaque tour.

b) Sophia commence à chaque tour.

c) Igor commence au premier tour puis à chaque tour, le joueur qui vient de perdre un point commence.

d) Même chose, mais Sophia commence au premier tour.

e) Igor commence au premier tour puis à chaque tour, le joueur qui vient de gagner un point commence.

f) Même chose, mais Sophia commence au premier tour.

2. Pour rendre le jeu équitable, les deux joueurs modifient les cartes. Désormais, chaque joueur possède initialement n cartes numérotées de 1 à n. Pour éviter les égalités, on ajoute la règle suivante : à chaque tour, le second à jouer n'a pas le droit de jouer la même carte que le premier. Si c'est le dernier tour et qu'il n'a pas le choix, le dernier point n'est pas attribué. Reprendre la question **1** dans ce cadre.

3. Igor propose une nouvelle répartition des cartes. On joue de nouveau avec des cartes numérotées de 1 à $2n$, mais en changeant la répartition initiale. Plus précisément, Igor veut être sûr de battre Sophia (c'est-à-dire avoir strictement plus de points qu'elle à la fin de la partie), mais il veut que la somme de ses n cartes soit la plus petite possible. Avec les différentes règles de la question **1**, estimer cette somme.

4. Proposer et étudier d'autres directions de recherche.

* * *

7. Le cavalier s'entête

Ada joue aux échecs. Elle étudie les déplacement de sa pièce préférée, le cavalier, sur un échiquier infini (dont les cases sont indexées par $\mathbb{Z}^2$). Plus exactement, soient a et b deux entiers tels que $0 < a \leqslant b$, Ada étudie une pièce qu'elle appelle *cavalier de type* (a, b), qui peut à chaque tour se déplacer de a cases parallèlement à un axe de l'échiquier, puis de b cases dans une direction perpendiculaire. Par exemple, le cavalier usuel du jeu d'échec est le cavalier de type $(1, 2)$. Le cavalier part de la case $(0, 0)$.

1. En fonction de a et b, le cavalier de type (a, b) peut-il atteindre toutes les cases de l'échiquier infini ? On pourra s'intéresser aux valeurs suivantes de (a, b) :

a) $(1, 1)$,

b) $(1, 2)$ [1],

c) $(1, 3)$,

d) $(2, 3)$,

e) (a, b) quelconques.

1. Cette question est étudiée dans l'article *Counting the Number of Squares Reachable in k Knight's Moves*, de A. Miller et D. Farnsworth. Par conséquent elle ne sera pas prise en compte dans l'évaluation mais il est recommandé de la traiter pour bien comprendre les enjeux du problème.

Sur chaque case de l'échiquier, Ada écrit le nombre minimal de coups qu'elle doit jouer avec le cavalier pour se rendre sur cette case depuis la case $(0,0)$. Si le cavalier ne peut pas atteindre une case, elle écrit « ∞ » dessus. Dans toutes les questions suivantes, on pourra commencer par étudier les cas des cavaliers considérés dans la question **1**.

2. Ada note u_k le nombre de cases de l'échiquier portant le nombre k. Encadrer la suite (u_k). Comment se comporte la suite quand $k \to +\infty$? Est-elle croissante ?

3. Dans les différents cas, que vaut le nombre écrit sur la case $(0,1)$. Proposer un encadrement.

4. Ada dit qu'une case c est *régulière* si pour toute case c' voisine de c, la différence entre les nombres écrits sur c et sur c' vaut exactement 1. Combien y a-t-il de cases qui ne sont pas régulières ? Si ce nombre est fini, estimer ce nombre. Sinon, quelle est la plus grande différence entre deux cases voisines que l'on peut observer une infinité de fois ?

5. Pour un entier $n \in \mathbb{N}^*$, Ada note B_n l'ensemble des cases de la forme (x,y) avec $x,y \in \mathbb{Z}$ et $|x|,|y| \leqslant n$. Le *temps d'intervention dans* B_n d'un cavalier est le plus grand nombre écrit sur les cases de B_n. Pour quelles valeurs de (a,b) ce temps d'intervention dans B_n est-il minimal ? Ada note T_n cette valeur. Estimer T_n en fonction n.

6. Proposer et étudier d'autres directions de recherche.

* * *

8. Championnats avec suspens

Soit $n \geqslant 2$ entier. Vincent veut organiser un championnat sportif entre n joueurs. Il veut que chaque joueur affronte tous les autres exactement une fois, mais que chaque joueur joue au plus une partie par jour. Il note $T(n)$ le nombre minimal de journées nécessaires pour organiser le tournoi.

1. Combien vaut $T(n)$?

Vincent décide des règles suivantes. Chaque match a un gagnant et un perdant. Le gagnant marque 1 point et le perdant 0. À la fin du championnat, il classe les joueurs par ordre décroissant de nombre de points. En cas d'égalité, il procède à un tirage au sort. Les joueurs à égalité peuvent donc être classés dans n'importe quel ordre.

2. Soit $1 \leqslant k \leqslant n$. Quel est le plus grand nombre de points que peut avoir le k-ième joueur du classement final ? Le plus petit nombre de points ?

Vincent ne veut pas perdre de temps. Dans la suite du problème, on suppose que le championnat est toujours organisé en exactement $T(n)$ journées (mais la manière d'organiser le championnat peut varier). Vincent aime que le suspens sur le classement final dure aussi longtemps que possible. Mais il sait bien que ce n'est pas toujours le cas.

3. Après j journées, un des joueurs sait que quels que soient les résultats des journées restantes, il sera premier du classement final. Estimer le plus petit j pour lequel c'est possible.

4. On se fixe $1 \leqslant k \leqslant n$. Reprendre la question précédente avec un joueur qui sait qu'il sera classé k-ième au classement final.

5. Juste avant la dernière journée, p joueurs connaissent déjà avec certitude leur classement final. Quel est la plus grande valeur possible de p ? Et en remplaçant « avant la dernière journée » par « après j journées » ?

6. Juste avant la dernière journée, Vincent fait la liste de tous les classements finaux possibles, et il note L le nombre de ces classements. Quel est la plus grande valeur possible de L ? Et la plus petite ?

7. Proposer et étudier d'autres pistes de recherche. On pourra par exemple envisager la possibilité de matchs nuls, qui rapportent a points avec $0 \leqslant a \leqslant 1$.

9. ALLUMER LE FEU

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Gabrielle et Marie jouent à un jeu. Elles ont devant elles n torches, chacune pouvant être soit allumée soit éteinte. Initialement, toutes les torches sont éteintes. Chacune à son tour, en commençant par Gabrielle, une des deux joueuses *active* une torche, c'est-à-dire qu'elle change l'état de cette torche : si la torche était éteinte, elle l'allume, et inversement. Pour rendre le jeu intéressant, Gabrielle et Marie s'imposent une contrainte : il est interdit d'obtenir une configuration déja obtenue précédemment (voir Figure 5). La première qui ne peut plus jouer avec cette contrainte a perdu.

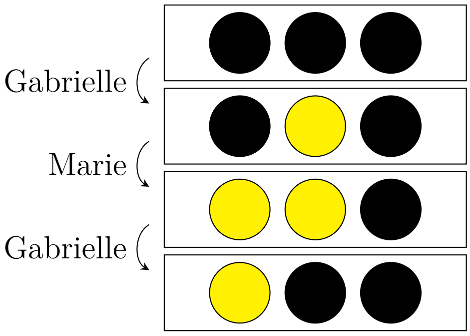

FIGURE 5. Illustration d'un début de partie. À la dernière étape, c'est au tour de Marie. Elle ne peut ni éteindre la première torche ni rallumer la deuxième (car on obtiendrait une configuration déjà observée), mais elle peut allumer la troisième.

Dans la question **1** seulement, Gabrielle et Marie collaborent, et on ne cherche pas à savoir qui gagne le jeu.

1. Est-il possible pour Gabrielle et Marie d'obtenir toutes les configurations possibles avec les n torches au cours d'une même partie ? Dans les cas où c'est possible, sur quelles configurations la partie peut-elle s'achever ?

2. Désormais, les deux joueuses jouent l'une contre l'autre. Laquelle des deux dispose d'une stratégie gagnante ?

3. Soit $1 \leqslant k \leqslant n-1$. Pour éviter d'avoir trop chaud, les joueuses s'interdisent d'avoir strictement plus de k torches allumées simultanément. Reprendre la question **2** dans ce cadre.

4. Les deux joueuses doivent à présent activer exactement a torches à chaque tour, pour un entier a fixé, en n'activant aucune des torches qui viennent de changer d'état. Reprendre les questions **2** et **3** dans ce cadre. On pourra commencer par traiter les cas $a = 2$ ou $a = 3$.

5. Même question, mais Gabrielle doit maintenant activer a torches par tour, et Marie b torches par tour, pour a et b deux entiers fixés.

6. Proposer et étudier d'autres directions de recherche.