$\mathbb{TFJM}^2$

Problèmes du 11ème Tournoi Français
des Jeunes Mathématiciennes et Mathématiciens

VERSION 1.0 MISE À JOUR LE 19 JANVIER 2021

Préambule

Ces problèmes sont difficiles et sont proposés par des chercheurs et étudiants en mathématiques. Ils n'admettent pas toujours, à la connaissance du jury, de solution complète et sont accessibles à des lycéens, c'est-à-dire que les auteurs sont certains qu'un travail de recherche élémentaire peut être mené sur ces problèmes. Le jury n'attend pas des candidats qu'ils résolvent entièrement un problème, mais qu'ils en comprennent les enjeux, résolvent des cas particuliers, repèrent les difficultés et proposent des pistes de recherche. Attention, les questions ne sont pas toujours classées par ordre croissant de difficulté. Enfin, il n'est pas nécessaire de traiter tous les problèmes : chaque équipe peut en refuser un certain nombre sans pénalité. On se reportera au règlement pour plus de détails.

 En cas de questions concernant le tournoi ou les énoncés, consulter le site `www.tfjm.org` ou contacter les organisateurs à l'adresse `contact@tfjm.org`.

Table des matières

Préambule	1
Notations	1
1. Agent 1234	2
2. Bataille rangée	2
3. C'est pas trop tôt !	4
4. Chocolaterie de haut vol	5
5. Stratégies féodales	6
6. Le facteur n'est pas passé	8
7. Vive les grenouilles libres !	10
8. Télé truquée	12

Mots-clés :
1. arithmétique, théorie des graphes — 2. jeux — 3. optimisation, combinatoire — 4. combinatoire — 5. géométrie — 6. optimisation, transport optimal — 7. jeux, théorie des graphes — 8. combinatoire

Notations

$\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$	ensemble contenant les éléments $a_1, a_2, \ldots, a_n$
$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$	ensemble des nombres entiers positifs
$\mathbb{R}_+^*$	ensemble des nombres réels strictement positifs

1. Agent 1234

L'agent 1234 doit désamorcer une bombe protégée par un cadenas à combinaison.

Le cadenas est constitué de $r \geq 2$ roues indépendantes. Chaque roue est constituée de $n \geq 2$ crans numérotés de 0 à $n-1$. L'agent peut tourner une roue pour la faire passer d'un cran au suivant, mais uniquement dans un sens : $0 \to 1 \to \cdots \to n-1 \to 0$. Le cadenas est initialement en position $0 \ldots 0$.

Si l'agent parvient à afficher la bonne combinaison, la bombe sera automatiquement désamorcée. Mais si le cadenas affiche une combinaison déjà obtenue précédemment, elle explosera immédiatement. La combinaison $0 \ldots 0$ n'est en particulier pas la bonne (car la bombe serait déjà désamorcée), et l'obtenir à nouveau déclenchera l'explosion.

Étant donné que l'agent ne connaît pas la combinaison, son objectif est trouver une séquence de mouvements qui passe par le plus de combinaisons possibles sans faire exploser la bombe.

Par exemple, si $n = 3$ et $r = 2$, l'agent peut tester toutes les combinaisons et ainsi désamorcer la bombe à coup sûr, en utilisant la séquence $00 \to 01 \to 11 \to 21 \to 22 \to 02 \to 12 \to 10 \to 20$.

Une séquence ne peut contenir ni $01 \to 11 \to 21 \to 01$ car 01 est répété, ni $01 \to 21$ car les roues ne peuvent avancer que d'un cran et ne peuvent pas reculer.

1. Dans cette question, on suppose $n = 10$ et $r = 3$. Est-il possible pour l'agent de désamorcer la bombe à coup sûr ? Si non, quel est le nombre maximum de combinaisons testables ?

2. Reprendre la question dans le cas général où l'on suppose seulement $n \geq 2$ et $r \geq 2$.

3. Reprendre la question 2 si l'agent ne peut jamais tourner deux fois d'affilée la même roue.

4. Soit $2 \leq d \leq r-1$. Reprendre la question 2 si l'agent ne peut pas tourner une roue parmi les d précédentes à avoir été tournées (la question précédente correspond à $d = 1$).

5. Soit $2 \leq k \leq r$. Reprendre la question 2 si, au lieu de tourner une roue à la fois, l'agent en tourne k à la fois d'un cran chacune (sans passer par une combinaison intermédiaire).

Par exemple, si $n = 10$, $r = 3$ et $k = 2$, l'agent peut commencer sa séquence de mouvements par $000 \to 011 \to 112 \to 213 \to \cdots$.

6. Soit $2 \leq k \leq r$. Reprendre la question 2 si, au lieu de tourner une roue à la fois, l'agent en tourne k à la fois, la première d'un cran, la deuxième de 2 etc. jusqu'à la k-ième de k (sans passer par une combinaison intermédiaire).

Par exemple, si $n = 10$, $r = 3$ et $k = 2$, l'agent peut commencer sa séquence de mouvements par $000 \to 012 \to 222 \to 342 \to \cdots$.

7. Dans cette question, on suppose $n = 10$. Soit $m \geq 2$. L'agent 1234 a appris que la bombe a un défaut de fabrication, et la combinaison est donc nécessairement un multiple de m. Elle cherche alors, parmi les séquences de mouvements qui passent par le plus de combinaisons multiples de m possible (idéalement toutes), à effectuer le moins de mouvements possibles, car elle est pressée par le compte à rebours. Reprendre le problème dans le cadre de la question 2, puis des questions suivantes. On pourra commencer par les cas $m = 10, 2, 3, 4$.

8. Proposer et explorer d'autres pistes de recherche.

* * *

2. Bataille rangée

Baptiste et Carole jouent au jeu de la bataille rangée.

Baptiste et Carole disposent chacun de $n \geq 1$ pions formant une rangée, numérotés de 1 à n. À chacun est assigné un ensemble d'entiers, appelé *ensemble de décalages*. On note B l'ensemble de décalages de Baptiste et C l'ensemble de décalages de Carole.

Baptiste et Carole jouent tour à tour, en commençant par Baptiste. À son tour, Baptiste doit éliminer l'une de ses pièces restantes, numérotée i, et une pièce restante de Carole numérotée j, telles que $j-i$ soit dans son ensemble de décalages B. Puis Carole dont éliminer l'une de ses pièces restantes, numérotée i, et une pièce restante de Baptiste, numérotée j, telles que $j-i$ soit dans son ensemble de décalages C. Si l'un des deux joueurs ne peut plus jouer, il a perdu, et son adversaire a gagné.

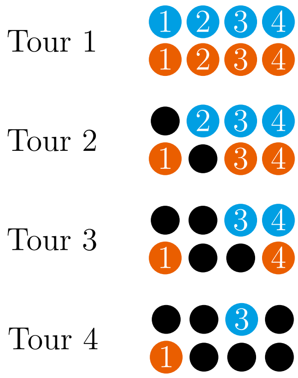

Figure 1 – Illustration d'une partie de bataille rangée avec $n=4$, $B=\{0,1\}$ et $C=\{-1,0\}$.

Par exemple, si $n=4, B=\{0,1\}, C=\{-1,0\}$, une partie possible est illustrée par la figure 1. Au début de la partie chaque joueur a 4 pièces, celles de Baptiste sont celles de la rangée du haut, en bleu, et celles de Carole sont celles de la rangée du bas, en orange.

Au premier tour Baptiste commence. Il élimine sa pièce 1 et la pièce 2 de Carole, ce qu'il peut faire puisque $2-1=1$ est dans B. Puis, au tour 2, Carole élimine sa pièce 3 et la pièce 2 de Baptiste, ce qu'elle peut faire puisque $2-3=-1$ est dans C. Au tour 3, Baptiste élimine enfin sa pièce 4 ainsi que la pièce 4 de Carole, ce qu'il peut faire puisque $4-4=0$ est dans B. Enfin au tour 4 Carole, ne peut alors plus jouer, car $3-1=2$ n'est pas dans C. Elle a donc perdu, et Baptiste a gagné.

Une stratégie pour un joueur est la donnée pour chaque configuration du jeu d'un coup à jouer pour ce joueur. On dit qu'un joueur dispose d'une stratégie gagnante s'il dispose d'une stratégie qui lui permet de gagner quels que soient les coups joués par l'adversaire.

1. On suppose $B=C$ dans cette question. Pour quel n Baptiste a-t-il une stratégie gagnante ? Étudier en particulier le cas $B=C=\{-1,0,1\}$ et le cas $B=C=\{0,1\}$.

2. Soit $-n \leqslant k \leqslant n$. On suppose $B=\{-n,-n+1,\dots,n-1,n\}$ et $C=\{-n,-n+1,\dots,k-1,k+1,\dots,n-1,n\}$ (Carole a le droit d'utiliser n'importe quel décalage, sauf k). En fonction de n et de k, qui gagne ? Reprendre la question si c'est à Baptiste que l'on interdit un décalage de k.

3. Reprendre la question pour d'autres ensembles B et C. On pourra notamment considérer $B=\{0,1\}, C=\{-1,0\}$, ou encore $B=\{x,y\}, C=\{-x,-y\}$ où x et y sont deux entiers distincts, ou plus généralement le cas où un décalage k est dans B si et seulement si $-k$ est dans C.

4. On fixe B, C et on note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite telle que u_n vaut 1 si Baptiste gagne dans la configuration à n pièces chacun, et 0 sinon.

Décrire les suites (u_n) possibles. Notamment, cette suite est-elle toujours périodique à partir d'un certain rang ? Parmi les suites périodiques à partir d'un certain rang, quelles sont les périodes possibles ?

Arthur, qui regarde les parties, trouve qu'elles sont trop longues. Il propose de modifier la règle du jeu : à son tour, un joueur élimine l'un de ses pions restants, numéroté i, ainsi que

tous les pions restants de l'adversaire dont le numéro j est tel que $j-i$ est dans son ensemble de décalages. Il est toujours possible de choisir n'importe lequel de ses pions, même si cela n'élimine aucun pion chez l'adversaire. Si le joueur ne peut pas jouer, car il ne lui reste plus de pions, il a perdu, et son adversaire a gagné.

5. Reprendre les questions précédentes avec cette nouvelle règle du jeu.

6. Proposer et étudier d'autres pistes de recherche.

* * *

3. C'est pas trop tôt !

Perrine a appelé Yohann, pizzaïolo chevronné, pour la préparation de pizzas pour le tournoi.

Perrine souhaite que $n \geq 1$ pizzas soient prêtes au plus proche de la fin de la journée à la date 0. Chaque pizza $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ a un temps de préparation spécifique $d_i \in \mathbb{R}_+^*$, ainsi qu'une priorité $p_i \in \mathbb{R}_+^*$. Yohann peut commencer à préparer les pizzas à partir de la date $-d$ où $d \in \mathbb{R}_+^*$. Toutefois, il ne peut préparer qu'une seule pizza à la fois, et doit préparer chaque pizza d'un seul bloc (sans pause).

La plupart des pizzas ne seront pas prêtes à la date 0 exactement, et Yohann cherche à minimiser le total des pénalités calculées comme suit :

— Pour une pizza $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ en retard, la pénalité est calculée comme la durée du retard multipliée par p_i.

— Pour une pizza $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ en avance, la pénalité est calculée comme la durée de l'avance multipliée par p_i.

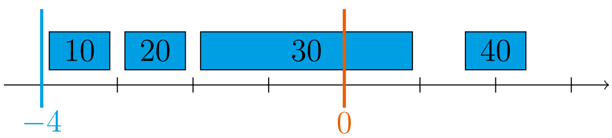

FIGURE 2 – Un planning possible pour Yohann, avec 4 pizzas.

La figure 2 présente un planning de préparation des pizzas pour Yohann avec $d = 4$ et 4 pizzas de durées de réalisation respectives $1, 1, 3, 1$ et de priorités respectives $10, 20, 30, 40$. La pénalité totale de Yohann pour cette organisation est $10 \times 3 + 20 \times 2 + 30 \times 1 + 40 \times 2.5 = 200$.

1. Lorsque $d = 0$, quelle est la pénalité minimale que Yohann peut obtenir ?
On suppose dans la suite que $d > 0$.

2. Quelle est la pénalité minimale que Yohann peut obtenir lorsque :

(a) pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $d_i = 1$ et $p_i = 1$?

(b) pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $d_i = 1$?

(c) pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $d_i = p_i$?

3. Soient $0 < d_0 \leq d$ et $0 < q < \frac{1}{2}$. Quelle est la pénalité minimale que Yohann peut obtenir lorsque :

(a) pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $d_i = \frac{d_0}{2^i}$ et $p_i = q^i$?

(b) pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $d_i = \frac{d_0}{4^{n-i}}$ et $p_i = \frac{1}{4^i}$?

(c) pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $d_i = i$ et $p_i = 1$?

4. On suppose que Yohann a le temps de préparer toutes les pizzas avant la date $-d$ (c'est-à-dire que $d_1 + d_2 + \ldots + d_n \leq d$). Quelle est la pénalité minimale que Yohann peut obtenir lorsque :

(a) pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $p_i = 1$?

(b) pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $d_i = i$ et $p_i = n - i + 1$?

5. Dans cette question, Yohann a potentiellement une infinité de pizzas, mais ne prépare que les n premières.

On suppose que, quel que soit le nombre n de pizzas qu'il prépare, $d_1 + d_2 + \cdots + d_n < d$, et que les pénalités vérifient, pour tout $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, $|p_i - p_j| \leq p_i g(i)$, où $g(k) = \frac{1}{2^k}$.

Estimer le plus précisément possible la pénalité minimale que peut s'assurer Yohann en fonction de n.

Que se passe-t-il pour d'autres fonctions décroissantes $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+^*$?

Afin de limiter ses pénalités, Yohann décide d'engager des commis. Ils se répartissent la réalisation des pizzas. Chaque pizza est préparée par un seul des pizzaïolos. Un pizzaïolo doit finir de préparer la pizza précédente avant d'en commencer une autre.

La figure 3 présente un planning de préparation des pizzas pour 3 pizzaïolos avec $d = 4$ et 7 pizzas de durées de réalisation respectives $1, 2, 3, 1, 2, 3, 1$ et de pénalités respectives $10, 10, 10, 20, 20, 30, 40$. La pénalité totale de Yohann pour cette organisation est $10 \times 1 + 10 \times 2 + 10 \times 2 + 20 \times 2 + 20 \times 0 + 30 \times 1 + 40 \times 3 = 240$.

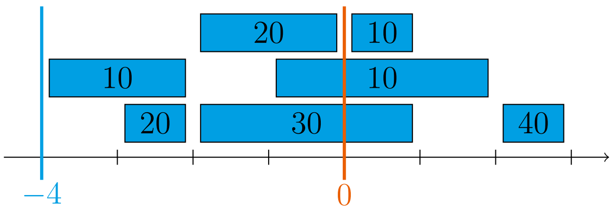

Figure 3 – Un planning possible pour 3 pizzaïolos, avec 7 pizzas.

6. Reprendre les questions 2 et 4 dans le cas où il y a m pizzaïolos.

7. Proposer et étudier d'autres directions de recherche.

* * *

4. Chocolaterie de haut vol

Malo, apprenti dans une chocolaterie de renom, se trompe parfois dans la recette des pièces au chocolat.

Malo a préparé $n \in \mathbb{N}^*$ pièces en chocolat, et les a déjà emballées avant de se rendre compte au vu des ingrédients qu'il lui reste qu'il a dû en rater $k \geq 1$.

La seule chose qui distingue les pièces ratées des bonnes pièces est leur masse : toutes les bonnes pièces ont une masse de 1, tandis que les ratées ont une masse proche mais différente de 1.

Il appelle Marie, la chocolatière, pour qu'elle l'aide à identifier les pièces ratées afin de ne mettre en vente que les bonnes pièces. Malheureusement, elle ne dispose que d'une balance à deux plateaux peu pratique, qui indique seulement quel plateau est le plus lourd. Sa balance est fournie avec autant de petites masses de masse 1 qu'elle en a besoin.

1. On suppose que toutes les pièces ratées ont une masse comprise entre $1 - \varepsilon$ et $1 + \varepsilon$. Trouver une condition sur ε pour que, si Marie place strictement plus de pièces et masses sur un plateau que sur l'autre, alors la balance penchera toujours du côté avec le plus de pièces et masses.

Dans la suite du problème, on se placera dans ce cas.

Pour commencer, on suppose $k = 1$: une unique pièce est ratée. De plus, les ingrédients restants permettent de savoir que la pièce ratée est plus lourde que les vraies.

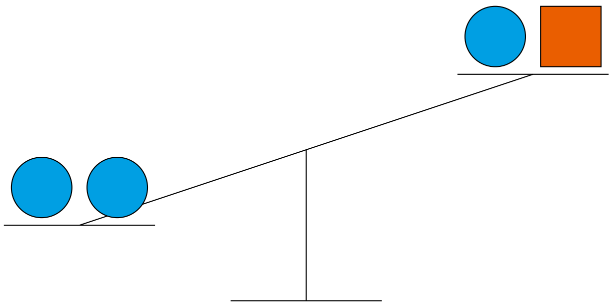

Figure 4 – Exemple de pesée de deux pièces contre une pièce et une masse. La balance penche à gauche, donc l'une des deux pièces de gauche est ratée et trop lourde, ou la pièce de droite est ratée et trop légère.

2. Malo croit se souvenir quelle pièce est ratée. En fonction de n, quel est le nombre minimal de pesées dont Marie a besoin pour vérifier s'il a raison ?

3. Malo n'a aucune idée de quelle pièce est ratée. En fonction de n, quel est le nombre minimal de pesées dont Marie a besoin pour savoir à coup sûr laquelle est ratée ? Sa stratégie doit fonctionner quelle que soit la pièce ratée.

4. Reprendre les questions 2 et 3 si Marie n'a pas de masses à sa disposition.

5. Reprendre les questions 2 à 4 si les ingrédients ne permettent pas de déterminer si la pièce ratée est plus lourde ou plus légère. Pour la question 2, Malo croit se souvenir que la pièce ratée est plus lourde (Marie veut seulement vérifier que c'est la pièce ratée, pas forcément qu'elle est effectivement plus lourde).

6. Reprendre les questions 2 à 4 dans le cas d'un nombre $k < \frac{n}{2}$ quelconque de pièces ratées, si Marie sait qu'elles sont toutes plus lourdes que les bonnes pièces et toutes de même masse (en respectant la contrainte de la question 1). Pour la question 2, Malo pense se souvenir exactement de quelles sont les pièces ratées. On pourra commencer par $k = 2$.

7. Reprendre le problème dans d'autres cas. Par exemple, on pourra supposer qu'il existe deux modèles de pièces ratées, de masse respectives $1 + \varepsilon$ et $1 - \varepsilon$ (où $\varepsilon > 0$ est assez petit pour respecter la contrainte de la question 1). On pourra également s'intéresser au cas où les pièces peuvent être de masse quelconque (toujours en respectant la question 1), ou encore se placer dans le cas où Marie ne connaît pas k.

* * *

5. Stratégies féodales

Au Moyen Âge, des seigneurs se partagent le contrôle de certains royaumes.

Le royaume du Chili est représenté par un segment de longueur 1, et chaque seigneur s possède d'un château qui est un point c_s de ce segment. Deux seigneurs ne peuvent pas avoir leur château au même point. La zone d'influence Z_s d'un seigneur s est le segment constitué de l'ensemble des points x du royaume qui sont strictement plus proches de c_s que de tout autre château. Le pouvoir p_s d'un seigneur est la longueur de sa zone d'influence.

La figure 5 illustre une répartition possible de 4 seigneurs dans le royaume du Chili. La zone d'influence du seigneur s_1 est le segment bleu.

1. Initialement $n \geq 1$ seigneurs sont placés dans le royaume. Leurs distances respectives à l'extrémité gauche du royaume sont $0 < a_1 < \cdots < a_n < 1$. Benoît, seigneur en devenir, peut choisir où installer son château. En fonction de $a_1, a_2, \cdots a_n$, quels sont les pouvoirs que Benoît peut obtenir ?

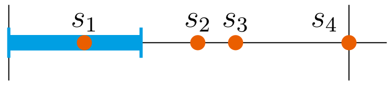

FIGURE 5 – Illustration du royaume du Chili avec 4 seigneurs

Soit t un seigneur. Pour un autre seigneur s, on note $a(t,s)$ le pouvoir qui serait celui de t si on enlevait le seigneur s du royaume. On dit que s est un ennemi juré de t si, pour tout autre seigneur s', $a(t,s) \geqslant a(t,s')$. Un seigneur peut avoir plusieurs ennemis jurés.

Par exemple, dans la répartition illustrée par la figure 5, le seigneur s_1 a pour ennemi juré s_2, s_2 a pour ennemi juré s_1, s_3 a pour ennemi juré s_2, et s_4 a pour ennemi juré s_3.

Un seigneur est dit machiavélique s'il a strictement le plus grand pouvoir parmi tous les seigneurs, mais sans être ennemi juré d'aucun seigneur.

2. Quels sont tous les entiers $n \geq 2$ tels qu'avec n seigneurs dans le royaume du Chili, il puisse y avoir un seigneur machiavélique ?

Non loin du royaume du Chili, deux autres royaumes sont partagés de la même manière : le royaume d'Uruguay, en forme de disque, et le royaume de Surinam, en forme de carré.

Dans ces deux royaumes la zone d'influence Z_s d'un seigneur s dont le château est au point s est la zone constituée de l'ensemble des points x qui sont strictement plus proches de c_s que de tout autre château. Le pouvoir p_s d'un seigneur est l'aire de sa zone d'influence. On définit de la même manière la notion de seigneur machiavélique dans ce cadre.

La figure 6 illustre une répartition possible de seigneurs dans des royaumes. La zone d'influence du seigneur s est dans chacun la zone bleue.

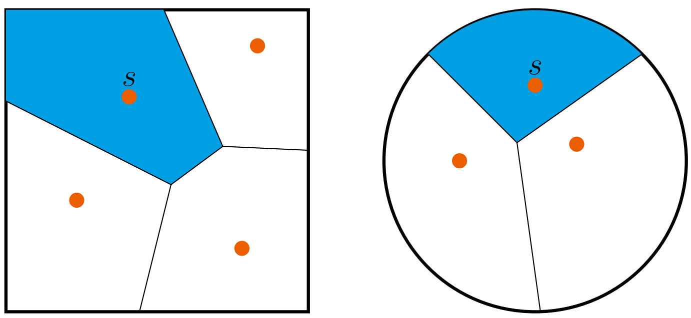

FIGURE 6 – Illustration d'une configuration de 4 seigneurs dans le royaume du Surinam, et d'une configuration de 3 seigneurs dans le royaume d'Uruguay.

3. Quels sont tous les entiers n tels qu'avec n seigneurs dans le royaume d'Uruguay, il puisse y avoir un seigneur machiavélique ? Et dans le royaume du Surinam ?

Un seigneur est dit haï s'il est ennemi juré de tous les autres seigneurs.

4. Pour chacun des trois royaumes, quels sont tous les entiers $n \geq 2$ tels qu'avec n seigneurs il puisse y avoir un seigneur haï ?

On dit qu'une configuration de seigneurs dans un royaume est k-équilibrée si chaque seigneur a exactement k ennemis jurés, et si chaque seigneur est l'ennemi juré d'exactement k seigneurs.

5. Pour chacun des trois royaumes, quels sont tous les entiers $k \geq 1$ tels qu'il existe une configuration k-équilibrée ?

6. Pour chacun des trois royaumes, quels sont les entiers $n \geqslant 2$ tels qu'il existe une configuration de n seigneurs sans qu'aucune paire de seigneurs ne soient ennemis jurés l'un de l'autre ?

7. On fixe le nombre $n \geq 2$ de seigneurs et, pour chaque seigneur s, un ensemble E_s d'autres seigneurs. Pour chacun des trois royaumes et en fonction de E_s, existe-t-il une configuration pour laquelle les ennemis jurés de s sont exactement les éléments de E_s ?

8. Proposer et étudier d'autres pistes de recherche. On pourra par exemple continuer d'étudier ces trois royaumes, ou bien déterminer s'il existe d'autres royaumes possédant des propriétés intéressantes au regard des questions précédentes.

* * *

6. Le facteur n'est pas passé

Chaque année, le comité d'organisation du $\mathbb{TFJM}^2$ se renouvelle partiellement. Les bénévoles du comité d'organisation de l'année actuelle reçoivent des sacs $\mathbb{TFJM}^2$.

Le comité d'organisation de Louis pour l'année 2020 était composé de $b_1 \geqslant 4$ bénévoles numérotés $L_1, L_2, L_3, \cdots, L_{b_1}$. Parmi ces bénévoles figurait Anaïs, qui avait le numéro L_1. Le comité d'organisation d'Anaïs pour l'année 2021 est composé de $b_2 \geqslant 4$ bénévoles $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_{b_2}$. Parmi ces bénévoles figure Louis, qui a le numéro A_1. Mis à part Anaïs et Louis, les seuls membres des deux comités sont $L_2 = A_{b_2}$ et $A_2 = L_{b_1}$.

Certains bénévoles sont voisins:

- Anaïs a b_2 voisins qui sont les membres de son comité, à savoir $A_1, A_2, \ldots, A_{b_2}$.
- Louis a b_1 voisins qui sont les membres de son comité, à savoir $L_1, L_2, \ldots, L_{b_1}$.
- Pour $2 < i < b_1$, le bénévole L_i a 3 voisins qui sont L_{i-1}, L_{i+1} et Louis.
- Pour $2 < i < b_2$, le bénévole A_i a 3 voisins qui sont A_{i-1}, A_{i+1} et Anaïs.
- Le bénévole $A_2 = L_{b_1}$ a 4 voisins qui sont A_3, L_{b_1-1}, Louis et Anaïs.
- Le bénévole $L_2 = A_{b_2}$ a 4 voisins qui sont L_3, A_{b_2-1}, Louis et Anaïs.

Par exemple, si Louis avait $b_1 = 5$ bénévoles dont Anaïs et Anaïs a $b_2 = 4$ bénévoles dont Louis, alors on représente les relations comme sur la figure 7.

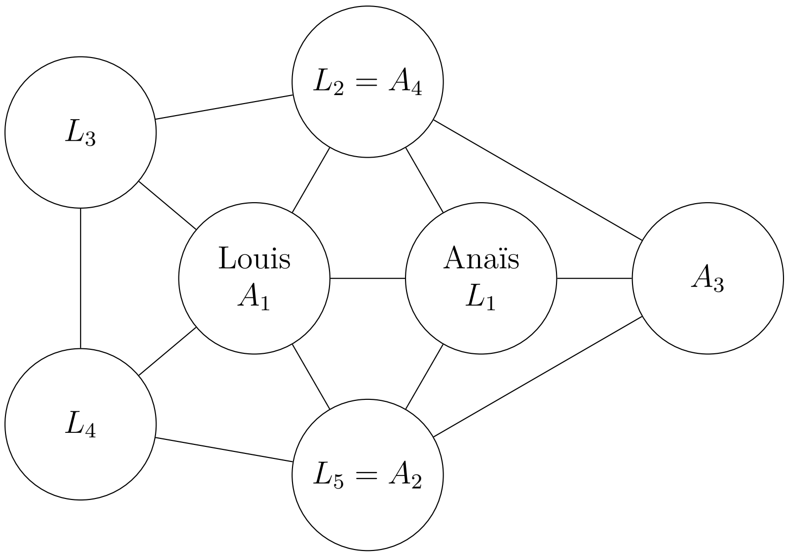

Figure 7 – Relations entre bénévoles lorsque $b_1 = 5$ et $b_2 = 4$

Cette année, le facteur a reçu de mauvaises instructions et il y a au total N sacs $\mathbb{TFJM}^2$ qui arrivent aux adresses du comité de Louis suivant la répartition:

- chaque membre du comité de Louis, excepté Louis, reçoit 1 paquet constitué de j_1 sacs ;
- Louis reçoit les $N - j_1 b_1$ sacs restants.

Ils veulent transmettre les sacs au comité d'Anaïs. Anaïs souhaite que tous les bénévoles de son comité aient exactement chacun 1 paquet de j_2 sacs (sauf elle) et elle gardera les $N - b_2 j_2$ sacs restants pour les donner aux participants.

Chaque sac peut être déplacé successivement entre des bénévoles voisins, mais chaque déplacement impose un coût de 1. Ainsi le coût total est le nombre total de fois où un sac a été déplacé entre deux voisins.

La figure 8 illustre un exemple de choix de transferts avec $j_1 = 6$, $j_2 = 7$, $b_1 = 5$ $b_2 = 4$ et $N = 100$. Les nombres de sacs initiaux sont représentés en orange. Ce choix de transferts consiste à effectuer les transferts de sacs le long des flèches orange, puis le long de la flèche bleu foncé, et enfin de faire un transfert de sacs le long des flèches bleu clair. Le nombre de sacs déplacés à chaque transfert est inscrit à côté de la flèche correspondante. Une fois les transferts effectués, le nombre de sacs de chaque bénévole, indiqué en bleu, est bien celui attendu. Le coût total pour ces transferts vaut :

$$b_1 \times j_1 + N + b_2 \times j_2 = 5 \times 6 + 100 + 4 \times 7 = 158$$

Louis et Anaïs veulent cependant minimiser les coûts et ce choix de transferts ne semble pas être le meilleur. On note $C_{\min}$ le plus petit coût total possible en choisissant les transferts de sacs effectués.

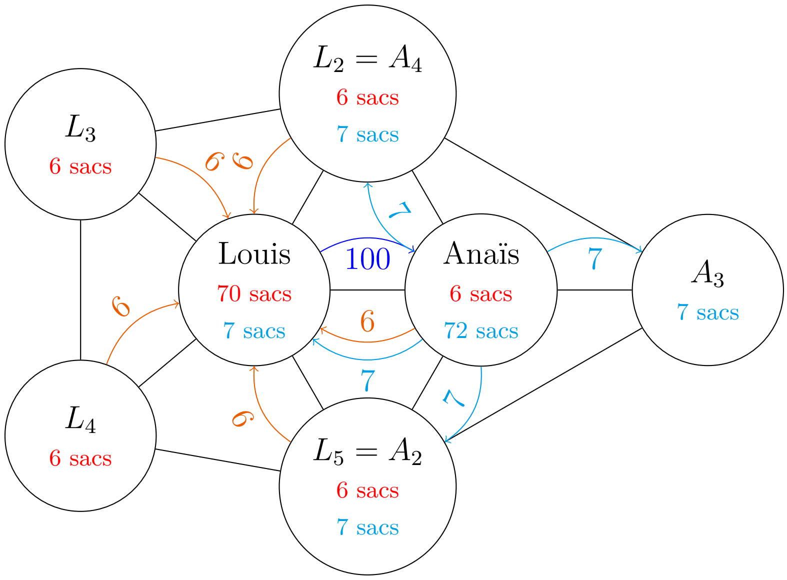

FIGURE 8 – Répartition des sacs initialement en orange et finalement en bleu

1. Sur l'exemple de la figure 8, pour $N = 100$, $b_1 = 5$, $b_2 = 4$, $j_1 = 6$, $j_2 = 7$, quel est le plus petit coût total $C_{\min}$ possible ?

On suppose pour l'instant que Louis et Anaïs sont aussi généreux l'un que l'autre et donnent le même nombre de sacs j aux bénévoles de leur comité, de sorte que $j_1 = j_2 = j$.

2. On suppose dans cette question que le nombre de sacs donnés aux participants est chaque année plus grand que le nombre de sacs donnés aux bénévoles, c'est-à-dire que $N \geqslant 2\max(b_1 j_1, b_2 j_2)$. Pour quelle(s) valeur(s) de b_1, b_2 et N peut-on assurer un coût d'exactement $C = N$?

3. On ne suppose plus que $N \geqslant 2\max(b_1 j_1, b_2 j_2)$. En fonction de N, b_1, b_2 et j, quelles sont les valeurs possibles du coût total C ?

4. En fait, le nombre de sacs distribués aux bénévoles ne change pas d'une année sur l'autre. Louis avait donc donné des paquets de $j_1 = b_2$ sacs à chacun de ses bénévoles et Anaïs souhaite que chacun de ses bénévoles ait $j_2 = b_1$ sacs. Reprendre la question précédente dans ce cadre.

5. Louis et Anaïs souhaitent dépenser le moins possible et avoir un budget équilibré, de sorte que $C_{\min} = N$ dès que $N \geqslant 2\max(b_1 j_1, b_2 j_2)$. Pour quelles valeurs de $b_1, b_2, j_1, j_2 \in \mathbb{N}$ est-ce possible ?

6. L'organisation du $\mathbb{TFJM}^2$ crée des liens et il y a en fait k contacts directs supplémentaires possibles entre les bénévoles des deux comités. Pour $N \geqslant 2\max(b_1 j_1, b_2 j_2)$, en fonction de b_1, b_2, j_1 et j_2, entre quels bénévoles est-il le plus judicieux d'établir ces k nouveaux contacts de sorte que $C_{\min}$ soit le plus petit possible ? On pourra commencer par traiter le cas $k = 1$.

7. Proposer et explorer d'autres pistes de recherche.

* * *

7. Vive les grenouilles libres !

Une grenouille saute de nénufar en nénufar sur un étang infini. Antoine et Benoît jouent sur cet étang.

On représente les nénufars par des points bleus, et la grenouille peut sauter d'un nénufar à un autre si les deux nénufars sont reliés par un trait.

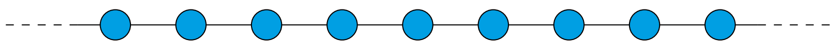

Figure 9 – Un exemple d'étang : une droite

Les règles du jeu sont les suivantes. Antoine commence en protégeant un nénufar. Puis Benoît coule un nénufar différent de celui protégé par Antoine. Ensuite Antoine protège un second nénufar qui n'a pas été déjà coulé, puis Benoît coule un nouveau nénufar qui n'est pas l'un de ceux qui ont été protégés par Antoine, et ainsi de suite.

Antoine et Benoît jouent à tour de rôle une infinité de fois, Antoine durant les tours $1, 3, 5, \dots$ et Benoît durant les tours $2, 4, 6, \dots$ Une fois que chacun a joué une infinité de fois, une infinité de nénufars ont été coulés, une infinité ont été protégés et il peut rester zéro, un, plusieurs ou une infinité de nénufars qui n'ont pas été touchés.

Antoine gagne si il peut déposer la grenouille sur un nénufar non coulé depuis lequel la grenouille peut atteindre une infinité d'autres nénufars en sautant uniquement entre des nénufars voisins qui n'ont pas été coulés. Sinon Benoît gagne.

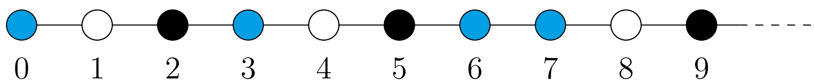

Figure 10 – Illustration de l'état d'un étang après une partie.

On appelle stratégie pour un joueur une règle qui à chaque configuration des nénufars associe un coup à jouer valide. On dit qu'une stratégie est gagnante pour un joueur si cette stratégie permet de gagner quels que soient les coups de l'autre joueur.

Un exemple de partie est illustré par la figure 10, où les nénufars dans l'étang ci-dessus sont numérotés par les nombres entiers naturels : les nénufars qu'Antoine a protégés sont en blanc, les nénufars que Benoît à coulés sont en noir, et ceux que ni l'un ni l'autre n'a touchés sont en bleu. Dans cette partie Antoine a décidé de protéger le nénufar correspondant à la plus petite puissance de 2 possible, et Benoît a décidé de couler le premier nénufar qui est à droite de tous les nénufars précédemment coulés ou protégés. Antoine a donc protégé le nénufar 1, puis Benoît a coulé le nénufar 2, puis, comme 1 et 2 avaient déjà été touchés, Antoine a protégé le nénufar 4, puis Benoît a coulé le 5 , et ainsi de suite.

C'est Benoît qui gagne cette partie car où que soit placée la grenouille, elle ne peut atteindre qu'un nombre fini de nénufars. En revanche si l'étang était une droite comme illustré par la figure 9 et que la partie s'était déroulée de même, alors ce serait Antoine qui gagnerait car il pourrait déposer la grenouille à gauche de tous les nénufars détruits, et la grenouille pourrait atteindre une infinité de nénufars.

1. Déterminer, en fonction de k, si Antoine ou Benoît possède une stratégie gagnante dans l'étang à k rangées illustré par la figure 11. On pourra commencer par étudier les cas $k = 1$ et $k = 2$.

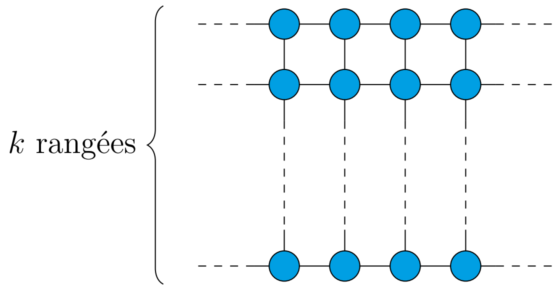

FIGURE 11 – Illustration de l'étang à k rangées.

2. Déterminer pour chacun des étangs illustrés figure 12 si Antoine ou Benoît possède une stratégie gagnante.

3. Maintenant on suppose qu'une fois qu'Antoine et Benoît ont joué une infinité de fois, tous les nénufars qui n'ont pas été protégés par Antoine sont coulés. Dans l'exemple présenté au début sur la droite complète, Antoine a donc quand même perdu car les nénufars protégés sont tous isolés.

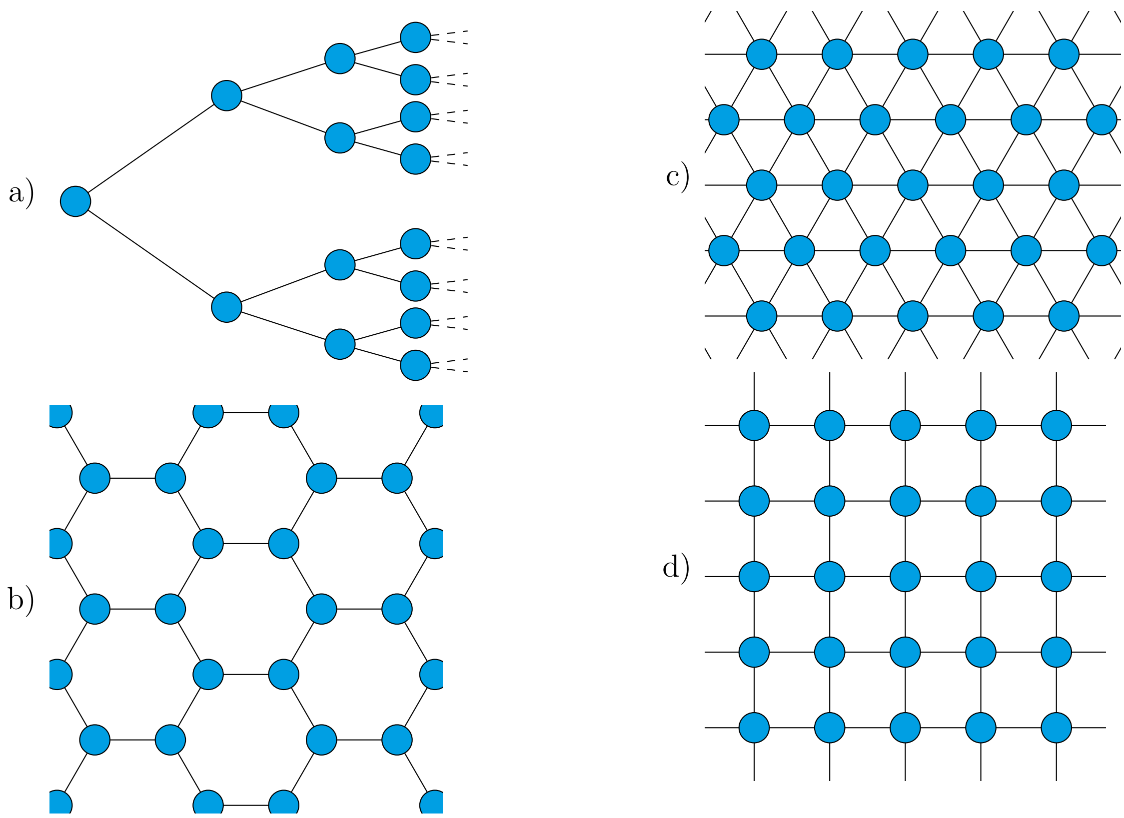

FIGURE 12 – Illustration de 4 étangs possibles

Reprendre les questions 1 et 2 dans ce cadre.

4. Antoine et Benoît décident de changer les règles du jeu : Antoine ne place plus la grenouille après la partie, mais avant son premier tour. On suppose que le nénufar correspondant est automatiquement protégé.

a) Reprendre les questions 1 et 2 avec cette nouvelle règle en étudiant toutes les positions initiales de la grenouille possibles pour chaque étang.

b) Reprendre la question 3 de la même façon.

5. Existe-t-il un étang tel qu'Antoine a une stratégie gagnante pour la règle de la question 2 mais que Benoît a une stratégie gagnante pour la règle de la question 3 ? Et l'inverse ? Plus généralement, comparer entre elles les règles des questions 2, 3, 4.a et 4.b : pour chaque sous-ensemble de ces quatre règles, existe-t-il un étang tel qu'Antoine a une stratégie gagnante pour chaque règle du sous-ensemble, mais Benoît possède une stratégie gagnante pour chaque autre règle ?

6. Au lieu de jouer tour à tour, Antoine joue maintenant A coups, puis Benoît joue B coups, puis Antoine joue à nouveau A coups, ... Reprendre les questions 1 et 2 avec cette nouvelle règle pour différentes valeurs de A et B.

7. Étudier d'autres étangs et trouver des critères et des résultats généraux pour déterminer la personne ayant la stratégie gagnante.

* * *

8. Télé truquée

Denis est directeur technique d'une émission de télé-réalité truquée.

L'émission se déroule comme suit : $n \geq 3$ participants s'affrontent dans une épreuve sportive, et le perdant est éliminé. Ce premier joueur éliminé choisit un joueur qui est lui aussi éliminé, qui choisit lui même un joueur à éliminer et ce jusqu'à ce qu'il n'en reste plus qu'un. Ce joueur est alors déclaré gagnant.

Ce que les spectateurs ne savent pas, c'est que Denis prépare avant chaque émission un *tableau de préférences* : il distribue avant l'émission à chaque participant un classement des autres participants. Lorsqu'un participant est éliminé, il décide toujours d'éliminer le participant parmi ceux qui restent le moins bien classé dans sa liste.

Nom	Riri	Fifi	Loulou
Participant classé 1^{er}	Fifi	Loulou	Riri
Participant classé $2^{\text{ème}}$	Loulou	Riri	Fifi

Figure 13 – Un exemple de tableau de préférences avec 3 participants.

Par exemple, avec le tableau de préférences illustré Figure 13, si Loulou est éliminé à l'épreuve sportive, alors Fifi est éliminé ensuite, et Riri gagne.

La direction ne peut pas prévoir qui perdra l'épreuve sportive, et qui sera par conséquent le premier éliminé.

Le directeur artistique envoie donc à Denis une *liste d'objectifs*. Un objectif est une paire (X, Y) de participants. On dit qu'un objectif est *satisfait* si le participant Y gagne l'émission lorsque le participant X perd l'épreuve sportive. La direction a couvert tous les cas, de sorte que pour chaque participant X il existe un unique Y tel que (X, Y) soit sur la liste d'objectifs.

Denis doit trouver un tableau de préférences tel que tous les objectifs de la liste sont satisfaits. Si un tel tableau de préférences existe, alors on dit que la liste d'objectifs est *réalisable*.

$$\begin{tikzcd}
& \text{Fifi} \arrow[dl] & \\
\text{Loulou} \arrow[rr] & & \text{Riri} \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

Figure 14 – Illustration d'une liste d'objectifs avec 3 participants qui forme un 3-cycle.

Par exemple, le tableau de préférences présenté en Figure 13 satisfait tous les objectifs de la liste d'objectifs présentée en Figure 14.

1. Pour une émission comportant seulement $n = 3$ candidats, quels sont les listes d'objectifs réalisables ?

Pour une liste d'objectifs donnée, on dit qu'un ensemble de $k \geq 2$ participants forme un k-cycle s'ils peuvent être numérotés $P_1, P_2, \cdots, P_k$ de sorte que l'objectif de P_1 est P_2, celui de P_2 est P_3, … et celui de P_k est P_1.

2. On suppose que les n participants forment un n-cycle pour la liste d'objectifs de Denis. La liste d'objectifs est-elle réalisable ?

3. 4. Dans cette question, Denis a une liste d'objectifs pour n participants, mais il a le droit d'ajouter jusqu'à N autres participants et choisir leurs objectifs. Est-il toujours possible pour Denis de trouver un tableau de préférences pour les $n + N$ participants qui réalise la liste d'objectifs, si Denis peut choisir N ? Et s'il se limite à $N \leq n$? À $N \leq 1$? À $N = 0$?

5. On suppose que, parmi les $n = a + b$ participants, a forment un a-cycle et b un b-cycle pour la liste d'objectifs de Denis. La liste d'objectifs est-elle réalisable ? On pourra commencer par traiter les cas $a = 2$ et $a = b$.

6. À quelle condition une liste quelconque d'objectifs est-elle réalisable ?

7. Après des années à présenter l'émission, Denis a pris sa retraite, de sorte que le tableau de préférence reste toujours le même. L'émission a continué avec les mêmes participants pendant plusieurs années, de sorte que chaque candidat a perdu l'épreuve sportive au moins une fois. Alice, qui connait les arcanes de l'émission et a vu tous les replays, essaie d'en déduire le tableau de préférences. En fonction de n, existe-t-il des tableaux de préférences qu'elle peut complètement déterminer ? Si oui, pour lesquels est-ce possible ?

8. Proposer et étudier d'autres pistes de recherche.

* * *