$\mathbb{TFJM}^2$

Problèmes du 12ème Tournoi Français des Jeunes Mathématiciennes et Mathématiciens

VERSION 0.1 MISE À JOUR LE 27 JANVIER 2022

Préambule

Ces problèmes sont difficiles et sont proposés par des chercheurs et étudiants en mathématiques. Ils n'admettent pas toujours, à la connaissance du jury, de solution complète et sont accessibles à des lycéens, c'est-à-dire que les auteurs sont certains qu'un travail de recherche élémentaire peut être mené sur ces problèmes. Le jury n'attend pas des candidats qu'ils résolvent entièrement un problème, mais qu'ils en comprennent les enjeux, résolvent des cas particuliers, repèrent les difficultés et proposent des pistes de recherche. Attention, les questions ne sont pas toujours classées par ordre croissant de difficulté. Enfin, il n'est pas nécessaire de traiter tous les problèmes : chaque équipe peut en refuser un certain nombre sans pénalité. On se reportera au règlement pour plus de détails.

 En cas de questions concernant le tournoi ou les énoncés, consulter le site `www.tfjm.org` ou contacter les organisateurs à l'adresse `contact@tfjm.org`.

Table des matières

Mots-clés :
1. Géométrie 2. Combinatoire 3. Optimisation, combinatoire 4. Optimisation 5. Arithmétique, géométrie 6. Graphes, théorie des jeux 7. Systèmes dynamiques, géométrie 8. Théorie des jeux, analyse

Notations

$\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$	ensemble contenant les éléments $a_1, a_2, \ldots, a_n$
$[\![a,b]\!] = \{a, a+1, \cdots, b-1, b\}$	intevalle d'entiers
$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$	ensemble des nombres entiers positifs
$\mathbb{R}_+$	ensemble des nombres réels positifs ou nuls
$\mathbb{R}_+^*$	ensemble des nombres réels strictement positifs
AB	distance entre les points A et B
$\overrightarrow{AB}$	vecteur de A à B

1. Pliage de polygones

Eulalie dispose de feuilles polygonales qu'elle plie pour obtenir d'autres polygones.

Elle plie toujours les polygones selon le même procédé : elle choisit deux sommets distincts A et B du polygone et plie le polygone le long de la médiatrice (d) du segment $[AB]$, ce qui revient à effectuer une symétrie axiale d'axe (d) à la partie du polygone du même côté de (d) que A. En particulier, le sommet A est replié sur le sommet B.

On dit qu'un polygone est *convexe* lorsque tous les angles internes sont inférieurs à 180°. Pour éviter de se retrouver avec des formes biscornues, Eulalie s'impose de ne plier que des polygones convexes. Un pliage est *convexe* si le polygone obtenu est convexe.

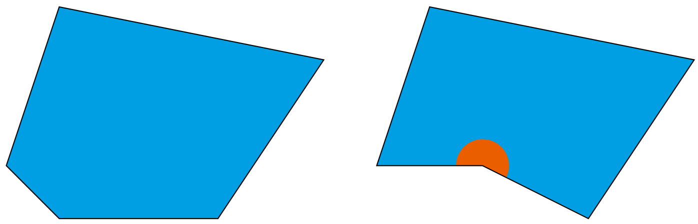


Figure 1 – Un polygone convexe et un polygone non-convexe.

La figure 2 illustre trois pliages, pour trois quadrilatères convexes différents. De gauche à droite les deux premiers pliages sont convexes et le troisième ne l'est pas. Le polygone obtenu pour le pliage du milieu est un quadrilatère : le point B n'est plus un sommet du polygone.

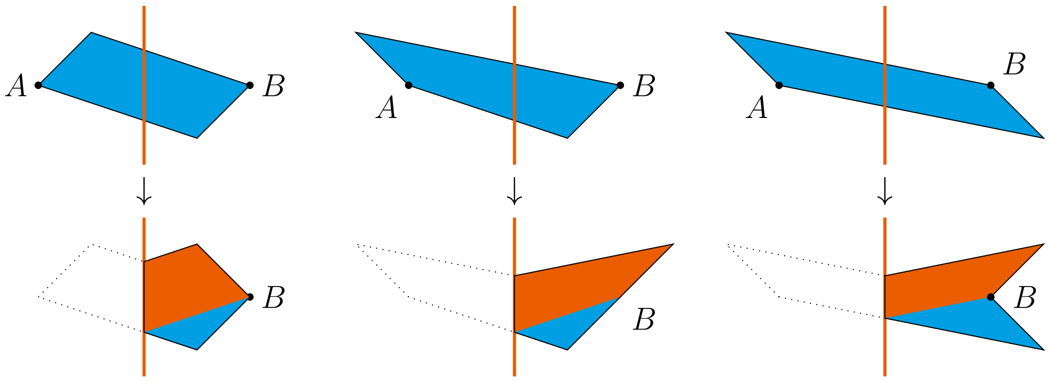


Figure 2 – Exemples de pliages.

Une forme obtenue après avoir effectué un pli convexe à partir d'un polygone convexe de départ est appelé *plié* du polygone de départ.

1. Décrire tous les pliés des polygones suivants.

a) Les triangles équilatéraux, isocèles ou rectangles.

b) Les triangles quelconques.

c) Les polygones réguliers.

2. Soit $n \geqslant 3$ un entier.

a) Combien de côtés au maximum peut avoir le plié convexe d'un polygone convexe à n côtés ?

b) Et au minimum ?

3. Dans cette question uniquement, les pliés effectués sont autorisés à ne pas être convexes, mais le polygone de départ l'est toujours. Reprendre la question 2 dans ce cadre.

Deux polygones P et Q à n côtés sont dit *semblables* si pour un certain agrandissement $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ il est possible de numéroter leurs sommets cycliquement respectivement $A_1, A_2, \cdots A_n$ et $B_1, B_2, \cdots B_n$ de sorte que les angles internes en A_i et B_i soient égaux et que $A_iA_{i-1} = \lambda B_iB_{i-1}$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, en posant $A_0 = A_n$, $B_0 = B_n$. La figure 3 illustre deux polygones qui sont semblables pour un agrandissement $\lambda = 2$.

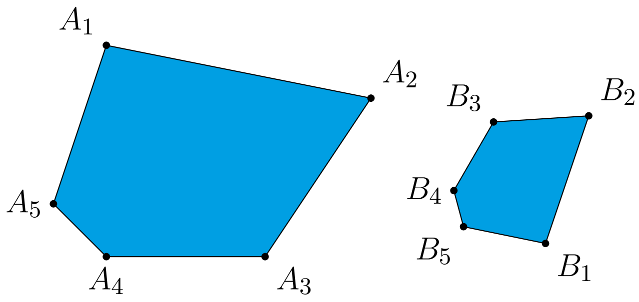


FIGURE 3 – Deux polygones semblables.

4. Eulalie veut à présent effectuer une suite de plis à partir d'un polygone de départ, et retomber sur un polygone qui lui est semblable. On appelle *suite de pliés* une succession de polygones convexes $P_0, P_1, \cdots, P_k$ telle que chaque polygone est un plié du précédent. Le polygone P_0 est alors appelé *polygone de départ* de la suite, et une suite de pliés de polygone de départ P_0 est dite *issue* de P_0. On dit que la suite de pliés $P_0, P_1, \ldots, P_k$ est *périodique* lorsque P_0 et P_k sont semblables et k est le plus petit entier strictement positif vérifiant cette propriété, c'est-à-dire que P_0 et P_i ne sont pas semblables pour tout $1 \leqslant i < k$. L'entier k est appelé *période* de la suite. Un polygone convexe P est dit *de période finie* s'il existe une suite périodique de pliés issue de P. Dans ce cas, on appelle période de P la période minimale d'une suite de pliés issue de P.

a) Quelle est la période du carré ? Décrire les suites périodiques issues du carré.

b) Soit $n \geqslant 3$ un entier. Existe-t-il des suites périodiques issues du polygone régulier à n côtés ? Si possible, donner un encadrement de la période du polygone régulier à n côtés.

5. Dans cette question, on s'intéresse aux suites périodiques de pliés de période 1. Existe-t-il des polygones semblables à un de leurs pliés ? Combien de côtés peut avoir un tel polygone ? Décrire tous les polygones de la sorte.

6. Pour quels $k \geqslant 1$ existe-t-il des polygones de période k ?

7. Dans cette question, on s'intéresse aux suites de pliés dont les polygones ont tous le même nombre de côtés. Une telle suite de pliés est dite *à nombre de côtés constant*, ou encore *suite à n côtés*, où n est le nombre de côtés des polygones de la suite. Reprendre les questions 4 et 6 en imposant aux suites périodiques d'être à nombre de côtés constant.

8. Proposer et étudier d'autres pistes de recherche.

* * *

2. Mélodie des hirondelles

La musicienne Elaïa donne à manger à des hirondelles posées sur des fils électriques devant sa fenêtre.

Il y a $n \geqslant 1$ hirondelles posées sur les $2k+1$ fils électriques horizontaux, numérotés de bas en haut de $-k$ à k, avec $k \geqslant 0$. Au départ, pour chaque $i \in [\![1,n]\!]$, on note $u_i \in [\![-k,k]\!]$ le numéro du fil sur lequel est posé la i-ème hirondelle. Elaïa imagine les positions des hirondelles sur les fils comme des notes de musique sur une portée et elle veut s'en inspirer pour composer de nouvelles musiques. On appelle *thème musical* un ensemble $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant n} = (u_1, \dots, u_n)$ de positions des hirondelles.

Pour faire varier les positions des hirondelles, Elaïa peut lancer une graine à l'hirondelle i pour qu'elle s'envole et se repose sur un autre fil. La règle est la suivante : si Elaïa lance une graine à l'hirondelle i, elle quittera son fil de numéro u_i pour venir se poser sur le fil de numéro $v_i = u_{i-1} + u_{i+1} - u_i$ où, par convention, $u_0 = u_{n+1} = 0$. Les autres hirondelles restent à leur position : $v_j = u_j$ pour $j \neq i$. Elaïa obtient ainsi un nouveau thème musical $(v_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ à partir du thème $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$. S'il n'y a pas de fil numéroté v_i, l'hirondelle i part définitivement et le processus s'arrête. Sinon elle continue à lancer d'autres graines.

Par exemple la Figure 4 illustre ce qui se passe si une graine est lancée à l'hirondelle 2. On a dans ce cas $(u_1, u_2, u_3, u_4) = (-2, -1, 2, 0)$ et $(v_1, v_2, v_3, v_4) = (-2, 1, 2, 0)$.

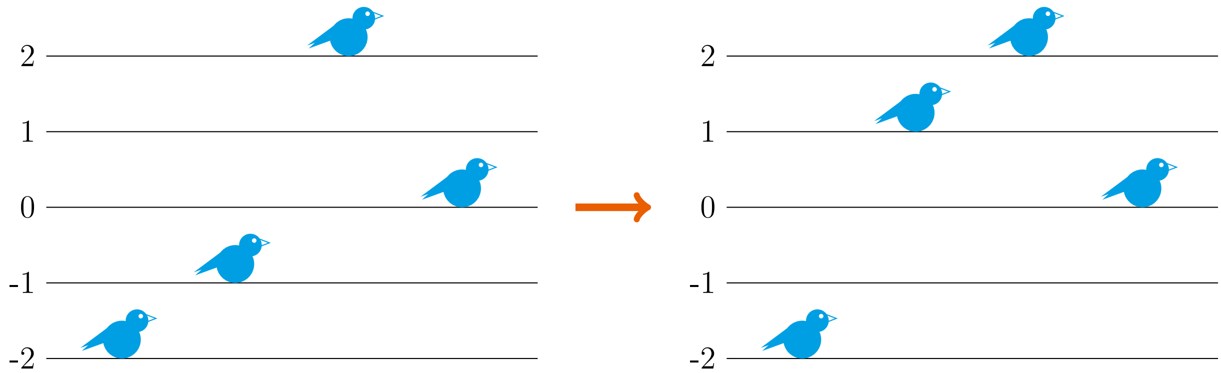


Figure 4 – Evolution de la position des hirondelles avec $n = 4$ hirondelles pour $k = 2$ si une graine est lancée à l'hirondelle 2.

1. On suppose k infini et on suppose que toutes les hirondelles sont au départ sur le fil numéro 0, sauf une qui est sur le fil numéro 1. Quels thèmes musicaux Elaïa peut-elle ainsi obtenir ? On pourra commencer par les cas où $n = 1, 2, 3$.

2. On suppose dorénavant k fini. Pour quels thèmes musicaux initiaux $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et quels k Elaïa est-elle certaine qu'aucune hirondelle ne partira définitivement, quel que soit le nombre et l'ordre dans lequel elle leur lance des graines ?

3. On dira qu'un thème musical $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est *plus aigu* qu'un autre $(u'_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ si pour chaque $i \in [\![1,n]\!]$, on a $u_i \geqslant u'_i$.

a) Étant donné un thème musical de départ, dans les situations où Elaïa peut s'assurer qu'aucune hirondelle ne parte définitivement, y a-t-il un thème musical plus aigu que tous les autres parmi ceux qu'elle peut atteindre en lançant des graines ?

b) Si oui, quel est le thème musical le plus aigu, en fonction du thème de départ ?

c) Si $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ désigne la position initiale des hirondelles, combien de graines $T((u_i)_{1\leqslant i\leqslant n})$ Elaïa doit-elle alors utiliser au minimum pour obtenir ce thème musical le plus aigu ?

d) Dans les cas où Elaïa obtient le thème musical le plus aigu en lançant $T((u_i)_{1\leqslant i\leqslant n})$ graines, combien de suites de lancers différents lui permettent d'atteindre ce thème le plus aigu en $T((u_i)_{1\leqslant i\leqslant n})$ graines ?

4. Aglaé, une amie ornithologue de Elaïa, lui propose une nouvelle espèce d'oiseaux pour son expérience musicale. L'oiseau numéroté $m \in [\![1,n]\!]$ est maintenant une mésange : quand Elaïa lui envoie une graine, elle change sa position en $v_m = 2u_{m-1} + u_{m+1} - u_m$ au lieu de $u_{m-1} + u_{m+1} - u_m$. Les autres oiseaux sont toujours des hirondelles, leur comportement ne change pas. Reprendre les questions précédentes dans ce cadre. On pourra commencer par traiter les cas $m = 1, 2, n$ avec de petites valeurs de n.

5. L'oiseau à la position m est maintenant d'une espèce de paramètres $(a,b) \in \mathbb{N}^2$: quand Elaïa lui lance une graine, il viendra alors se reposer à la position $v_m = au_{m-1} + bu_{m+1} - u_m$. Ainsi, la question 4 correspondait à un oiseau de paramètre $(a,b) = (2,1)$. Reprendre les questions 1,2,3 avec cette nouvelle espèce d'oiseaux en discutant des résultats en fonction de m et du couple (a,b).

6. Proposer et explorer d'autres pistes de recherche. On pourra par exemple changer l'espèce de plusieurs oiseaux.

* * *

3. PROFESSEUR CONFINÉ

Timothé est professeur de mathématiques. Il est tombé malade et va devoir s'absenter pendant une semaine. Il demande à son amie Perrine de le remplacer.

Timothé laisse le choix à Perrine de placer les $n \geqslant 1$ élèves de sa classe comme elle veut dans la salle de classe qui compte n places, mais il aimerait qu'à son retour elle lui indique à quelles places étaient les élèves. Cependant, Perrine aime les devinettes et plutôt que de donner le plan de classe à Timothé, elle lui demande de lui écrire une liste de questions auxquelles elle répondra à la fin de la semaine. Timothé veut être certain qu'en lisant les réponses à son retour la semaine suivante, il puisse retrouver à coup sûr le plan de la classe durant son absence, mais il veut que cette liste soit la plus courte possible.

1. Les élèves et les places sont numérotés de 1 à n. Déterminer si Timothé peut déterminer à coup sûr le plan de classe, et si oui estimer le nombre minimal de questions qu'il doit poser, s'il est obligé de poser des questions de la forme :

a) « Où se trouvait l'élève i ? » avec $1 \leq i \leq n$.

b) N'importe quelle question par laquelle Perrine peut répondre par « oui » ou « non ».

c) « Est-ce que l'élève i se trouvait à la place p ? » avec $1 \leq i, p \leq n$.

d) « Donne moi l'ensemble des élèves (pas forcément dans l'ordre) qui étaient assis aux places $p_1, p_2, ..., p_k$ » où $1 \leqslant k \leqslant n$ est fixé par Perrine.

e) « Combien d'élèves sont bien placés sur ce plan de classe ? » en proposant un plan de classe.

2. Maintenant, Timothé appelle Perrine par téléphone. Il reçoit alors la réponse à chacune de ses questions juste après l'avoir posée. Reprendre la question 1 dans ce cadre.

3. Pendant la semaine, Perrine s'est trompée de salle, et elle est allée dans une salle avec $m > n$ chaises. Timothé le sait. Reprendre les questions précédentes dans ce cadre.

4. Perrine décide de corser le jeu et s'autorise à mentir sur certaines questions. On fixe $l \in \mathbb{N}^*$, et on suppose que Perrine a le droit de mentir l fois et que Timothé connait l. Reprendre les questions précédentes dans ce cadre.

5. Proposer et étudier d'autres pistes de recherche.

* * *

4. Nain sans mémoire

Le nain Alaric est un chercheur d'or. Il se rend à la mine tous les jours pour y trouver des pépites.

Il a besoin chaque jour pour cela de trois outils : une pioche, un casque et une lampe. Chaque outil s'use à force d'être utilisé et a donc une durée de vie limitée : une pioche, un casque et une lampe peuvent respectivement servir au plus 2,3 et 3 jours, après quoi ils se cassent. Le nain a la possibilité de laisser certains outils chez les gobelins le soir en sortant de la mine pour qu'ils les réparent pendant la nuit et les rendent le lendemain matin, mais il doit alors immédiatement payer une pièce par outil remis à neuf.

Cependant, Alaric est victime d'une malédiction : le matin au réveil, il a tout oublié. Il ne sait plus quel jour on est, ni ce qu'il a fait les jours précédents. Il est également incapable d'observer l'usure de ses outils. Ainsi, chaque soir, au moment de choisir quels outils il laisse aux gobelins, il ne se souvient que de ceux qu'ils lui ont rendu le matin. S'il tente d'utiliser un outil un jour de plus que sa durée de vie ne le permet, il se casse. Le nain ne peut alors plus sortir, il erre dans la mine pour l'éternité.

Le but du nain est donc de trouver une stratégie pour dépenser le moins d'argent possible sans jamais risquer de se perdre dans la mine. Le premier jour, les gobelins lui fournissent tous ses outils remis à neuf, mais le nain ne sait bien sûr pas que c'est le premier jour. On note c_n la somme minimale que le nain doit dépenser jusqu'au n-ième jour inclus pour s'assurer de ne pas se perdre dans la mine jusque-là.

1. Encadrer c_n aussi précisément que possible. Même question si la lampe peut servir jusqu'à 4 jours au lieu de 3.

2. Le nain a maintenant $k \geqslant 1$ outils. On note $v_1, ..., v_k \geqslant 1$ leurs durées de vie et $c_n(v_1, ..., v_k)$ la somme minimale que le nain doit dépenser jusqu'au n-ième jour inclus pour s'assurer de ne pas se perdre dans la mine jusque-là. Estimer $c_n(v_1, ..., v_k)$, en s'intéressant principalement aux cas $n > 2^k$, pour

a) $k = 2$ et $v_1, v_2 \geqslant 1$ quelconques.

b) $v_i = k$ pour tout $i \in [\![1, k]\!]$.

c) $v_i > k$ pour tout $i \in [\![1, k]\!]$.

d) $v_i = i$ pour tout $i \in [\![1, k]\!]$.

e) $v_i = 2^i$ pour tout $i \in [\![1, k]\!]$.

f) $v_1, ..., v_k$ quelconques. On pourra s'intéresser à d'autres valeurs particulières de $v_1, ..., v_k$.

3. A-t-on toujours $c_n(v_1, ..., v_{k+1}) \geqslant c_n(v_1, ..., v_k)$ pour tout $n, k, v_1, ..., v_k, v_{k+1} \geqslant 1$? Si non, donner des contre-exemples.

4. Dans cette question, Alaric peut acheter un porte-bonheur aux gobelins, qui coûte une pièce et a une durée de vie infinie. Le matin quand il se réveille, s'il a un porte-bonheur, il peut décider le soir de le jeter ou de le garder, et s'il n'en a pas, il peut décider le soir d'en acheter un ou non.

a) Reprendre les questions précédentes dans ce cadre. En particulier, existe-t-il des ensembles d'outils pour lesquels la présence du porte-bonheur diminue le coût minimal ? Si oui, les décrire.

b) Même question si les goblins proposent $m \geqslant 2$ porte-bonheur différents au nain.

5. Maintenant, si le nain casse un de ses outils dans la mine, il peut appeler à l'aide pour qu'une équipe de secouristes vienne le chercher, mais cela lui coûte alors $p \geqslant 1$ pièces. Il doit alors laisser ses outils cassés aux gobelins, et peut comme d'habitude en laisser d'autres s'il le souhaite. Les secouristes ne parlent pas la langue nain et ne peuvent donc lui communiquer aucune information. Reprendre les questions 1 à 4 dans ce cadre. En particulier, existe-t-il des ensembles d'outils pour lesquels la présence des secouristes diminue le coût ? Si oui, les décrire.

6. Proposer et étudier d'autres direction de recherche.

* * *

5. Bricolage microscopique

Malo est un bricoleur particulier qui fait un travail très minutieux : il manipule des tiges métalliques très fines, qu'il observe avec son microscope.

Depuis son microscope, Malo observe n tiges qui forment chacune une droite sur l'écran, certaines d'entre elles pouvant être confondues. Il peut effectuer trois types de transformations pour déplacer ces droites :

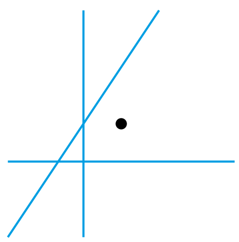
(i) À l'aide de rayons laser très sophistiqués, il est capable de choisir une de ces tiges et de la refléter par rapport à une autre des tiges présentes ;

(ii) Il peut agrandir ou rétrécir l'image entière avec son microscope, avec n'importe quel agrandissement $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, c'est-à-dire que le point de coordonnées (x, y) est envoyé sur le point de coordonnées $(\lambda x, \lambda y)$ (cela agit donc sur toutes les droites) ;

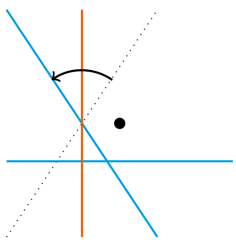
(iii) Il peut translater toutes les droites d'un même vecteur $\overrightarrow{v}$.

Il peut uniquement effectuer ces opérations, il ne lui est pas permis par exemple d'appliquer une rotation à toutes les droites. Si une droite d est confondue avec une droite d', Malo peut cenpendant bouger la droite d avec l'opération (i) sans bouger la droite d'. Des exemples de transformations permises sont illustrés Figure 5.

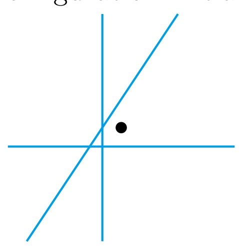
En appliquant ces trois types d'opérations un nombre fini de fois, il peut obtenir d'autres configurations de droites. Si Malo est capable d'obtenir une configuration $\mathcal{C}$ de droites à partir d'une configuration $\mathcal{C}'$, on dit que $\mathcal{C}'$ est *accessible* depuis $\mathcal{C}$.



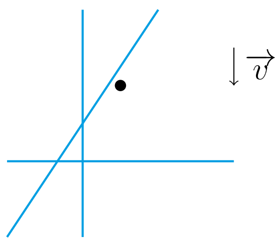
Configuration initiale



Opération (i), réflexion d'axe la droite orange



Opération (ii), agrandissement de rapport $\frac{1}{2}$



Opération (iii), translation de vecteur $\overrightarrow{v}$

Figure 5 – Les trois types d'opérations permises. Le point noir illustre l'origine du plan.

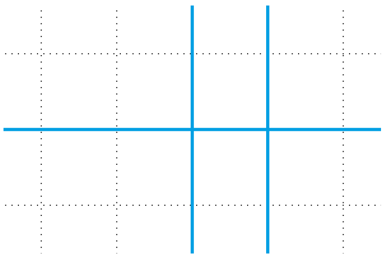
1. Soit $n \geqslant 1$ un entier. Étant donné deux configurations de n droites parallèles à l'axe des abscisses et telles que deux d'entre elles soient toujours à distance entière, à quelle condition peut-on accéder à l'une depuis l'autre ? On pourra commencer par le cas $n=3$.

2. Une configuration de droites est dite *carrée* si toutes les droites appartiennent à une grille formée de carrés identiques dont les côtés sont parallèles aux axes. Une configuration de droites est dite *triangulaire* si toutes les droites appartiennent à une grille formée de triangles équilatéraux identiques ayant tous un côté parallèle à l'axe des abscisses. Les deux types de grilles ainsi que des exemples de configurations carrées et triangulaires sont illustrés Figure 6.

(a) Soit $n \geqslant 1$ un entier. Existe-t-il un ensemble fini E de configurations carrées avec n droites tel que toute configuration carrée à n droites soit accessible depuis une configuration de E ? Si oui combien de configurations carrées faut-t-il au minimum ?

(b) Étant donné deux configurations carrées, comment savoir si l'une est accessible depuis l'autre ?

3. Reprendre la question précédente en remplaçant les configuations carrées par les configurations triangulaires.



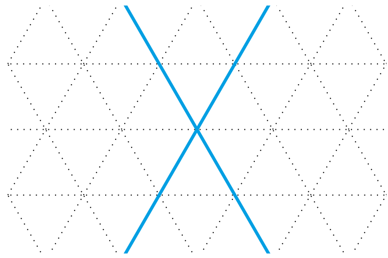


Figure 6 – Une configuration carrée avec 3 droites et une configuration triangulaire avec 2 droites.

Les droites sont à présent numérotées de 1 à n. Malo décide d'attribuer à chaque droite un nouveau numéro, qui sera noté $\sigma(i)$ pour la droite i. Il a cependant fait attention à ce que chaque numéro de 1 à n apparaisse exactement une fois. Une configuration est *interchangeable* si, quelle que soit la renumérotation de Malo, il lui est possible d'effectuer des transformations de sorte qu'après ces transformations, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, la droite $\sigma(i)$ apparaisse exactement là où la droite i était précédemment.

4. Quelles sont les configurations triangulaires et carrées qui sont interchangeables ?

5. Trouver des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une configuration quelconque de droites soit interchangeable. On pourra commencer par traiter le cas où les n droites sont toutes parallèles.

6. Proposer et étudier d'autres pistes de recherche.

* * *

6. Villes jumelées

Aliénor et Boniface sont maires de deux villes A et B. Boniface veut organiser un jumelage avec la ville d'Aliénor mais celle-ci cherche à faire échouer ce projet.

Dans chacune des villes, certains habitants sont amis, l'amitié étant considérée comme réciproque. Un jumelage consiste à donner à chaque habitant de la ville A un unique correspondant dans la ville B de sorte que deux personnes différentes aient des correspondants différents. Aliénor et Boniface organisent les correspondances entre les habitants comme suit : chaque jour, Aliénor choisit un habitant de la ville A qui n'a pas encore de correspondant, puis Boniface choisit son correspondant dans la ville B parmi les habitants qui n'ont pas encore de correspondant. Si à un certain moment, deux habitants d'une même ville sont amis et ont tous les deux des correspondants mais ceux-ci ne sont pas amis, alors le jumelage échoue et la procédure s'arrête. Le jumelage est *parfait* si Boniface parvient à donner un correspondant à chaque habitant de la ville A.

1. À quelle condition sur les villes A et B est-il possible pour Boniface de s'assurer d'atteindre un jumelage parfait, quels que soient les choix d'Aliénor ? On supposera que les villes A et B ont un nombre fini d'habitants (mais pas forcément le même).

Étant donné deux villes A et B, leur *compatibilité maximale asymétrique* $C(A,B)$ est le plus grand entier n tel que Boniface puisse s'assurer que la correspondance n'échoue pas après n jours, quels que soient les choix d'Aliénor.

Soit $k \geqslant 3$. Un *k-cycle* dans une ville est un ensemble de k habitants $e_1, \cdots, e_k$ tels que les seuls amis de e_i soient e_{i-1} et e_{i+1} pour tout $1 \leqslant i \leqslant k$, en posant $e_0 = e_k$ et $e_{k+1} = e_1$. La ville dont les $a_1 + a_2 \cdots + a_\ell$ habitants forment un a_1-cycle, un a_2-cycle, ..., et un a_ℓ-cycle disjoints est appelée $\mathcal{C}_{a_1,a_2,\cdots,a_\ell}$. La ville $\mathcal{Z}$ est la ville infinie avec un habitant par entier relatif, et telle que les seuls amis de l'habitant i sont les habitants $i+1$ et $i-1$.

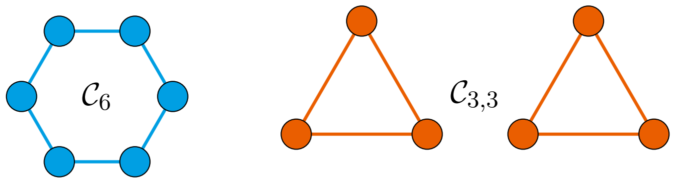


FIGURE 7 – La ville $\mathcal{C}_6$ et la ville $\mathcal{C}_{3,3}$

La figure 7 illustre la ville $\mathcal{C}_6$ et la ville $\mathcal{C}_{3,3}$. Les habitants sont représentés par des cercles, et deux habitants sont amis lorsqu'un segment les rejoint.

2. En supposant qu'il y a le même nombre $n \in \mathbb{N}$ d'habitants dans la ville A que dans la ville B, quelles valeurs peut prendre $C(A,B)$?

3. Estimer la valeur de $C(\mathcal{C}_n, \mathcal{Z})$ et de $C(\mathcal{Z}, \mathcal{C}_n)$. On pourra commencer par considérer de petites valeurs de n.

4. Estimer $C(\mathcal{C}_{a+b}, \mathcal{C}_{a,b})$ et $C(\mathcal{C}_{a,b}, \mathcal{C}_{a+b})$ pour $a, b \geqslant 1$ entiers. On pourra commencer par considérer de petites valeurs de a et b.

L'année suivante, Aliénor et Boniface s'organisent différemment : chaque jour Aliénor choisit un habitant dans la ville de son choix qui n'a pas de correspondant, puis Boniface choisit son correspondant dans l'autre ville parmi les habitants qui n'ont pas encore de correspondant. On appelle alors *compatibilité maximale symétrique* et on note $D(A,B)$ le plus grand entier n tel que Boniface puisse s'assurer que la correspondance n'échoue pas après n jours, quels que soient les choix d'Aliénor.

5. Reprendre les questions précédentes en remplaçant la compatibilité maximale asymétrique par la compatibilité maximale symétrique.

6. Proposer et étudier d'autres directions de recherche.

* * *

7. Promenade de chiens

Boule décide d'aller promener ses chiens. Malheureusement pour lui, ces derniers sont très turbulents et se courent après.

Boule possède $n \geqslant 2$ chiens. Pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, le chien numéro i suit le chien numéro $i+1$ (en considérant que le chien numéro $n+1$ est le chien numéro 1). Les chiens se déplacent de la manière suivante : à chaque seconde, pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, le chien numéro i fait un pas de longueur 1 en direction du chien $i+1$. Plus précisément, pour tout $t \in \mathbb{N}$, en notant $C_i(t)$ la position du chien i au bout de t secondes :

— si $C_i(t) \neq C_{i+1}(t)$, alors $C_i(t+1)$ est l'unique point tel que les vecteurs $\overrightarrow{C_i(t)C_i(t+1)}$ et $\overrightarrow{C_i(t)C_{i+1}(t)}$ aient la même direction, le même sens, et $C_i(t)C_i(t+1) = 1$.

— si $C_i(t) = C_{i+1}(t)$, alors $C_i(t+1) = C_i(t)$, autrement dit le i-ième chien ne bouge pas.

Les chiens se déplacent donc tous en même temps à chaque seconde.

La figure 8 illustre un exemple avec $n = 3$.

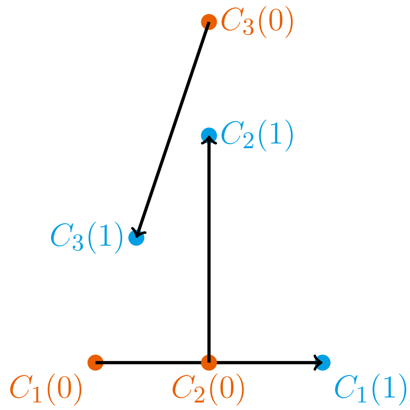


Figure 8 – Un groupe de 3 chiens aux instants $t = 0$ et $t = 1$

Boule a attaché une laisse de longueur L au cou de chacun de ses chiens. Une laisse se brise si à un temps $t \in \mathbb{N}$, la distance entre Boule et un de ses chiens est strictement supérieure à L.

1. Boule est d'humeur paresseuse : il choisit un point au début de la balade en fonction des positions initiales des chiens et ne bouge plus.

a) On suppose que $n = 3$ et que les trois chiens sont disposés initialement sur les sommets d'un triangle équilatéral de côté c. Existe-t-il une longueur L telle que Boule puisse s'assurer de ne briser aucune laisse ? Si oui quelle est la plus petite longueur L qui permet cela, en fonction de c ?

b) On suppose à présent n quelconque. Est-il vrai que peu importe la configuration initiale, Boule peut toujours prévoir une longueur de laisse suffisante ? On pourra commencer par étudier les cas $n = 2, 3, 4$.

2. À partir de maintenant Boule décide de se déplacer pour éviter que les laisses ne se brisent : à chaque instant t il peut se placer au point de son choix (il court très vite donc il n'a pas de limitation due à sa vitesse).

a) Pour $n = 3$ chiens en position initiale quelconque, est-il vrai que Boule peut prévoir une longueur de laisse suffisante pour que la laisse ne se brise pas tant qu'il se déplace avec ses chiens ?

b) Étudier le cas de n chiens en position intiale quelquonque.

Une longueur L_0 est dite *universelle* pour n chiens si quelle que soit la position initiale des chiens, il existe un temps t_0 à partir duquel Boule, qui se déplace, puisse remplacer ses laisses par des laisses de longueur L_0 sans que plus jamais elles ne se brisent.

3. Pour quels $n \geqslant 2$ existe-t-il une longueur universelle pour n chiens ? Pour de tels n, quelle est la plus petite longueur universelle ? On pourra commencer par traiter les cas $n = 2, 3, 4$.

Mylène, la voisine de Boule, possède un chat, qui se situe au point $M(t)$ au temps t. On suppose désormais que le chien numéro n ne suit plus le chien numéro 1 mais le chat, c'est-à-dire qu'à chaque seconde il fait un pas de longueur 1 en direction du chat. Les règles de déplacement des autres chiens restent inchangées.

4. Le chat de Mylène se déplace sur les sommets d'un N-gone régulier de côté 1. À chaque instant, il passe d'un sommet au sommet suivant (dans le sens direct).

a) Si Boule n'a qu'un seul chien, et que le chien démarre au centre du N-gone, estimer la longueur de laisse que Boule doit prévoir s'il ne bouge pas.

b) Même question pour n chiens qui commencent tous au centre.

5. Cette fois le chat se déplace sur une droite en faisant un pas de longueur 1 dans la même direction à chaque instant. Quelle longueur de laisse Boule doit-il prévoir s'il peut bouger, en fonction de la configuration initiale ?

6. Proposer et étudier d'autres pistes de recherche.

* * *

8. Persée et la Gorgone

Persée s'aventure dans la caverne de la Gorgone, et cherche à échapper à son regard pétrifiant.

La caverne de la Gorgone est un plan sur lequel se trouve un obstacle $\mathcal{O}$, qui est un ensemble de points sur lesquels Persée et la Gorgone ne peuvent pas s'arrêter, mais ils sont capables de sauter par dessus. Persée et la Gorgone savent à chaque instant où l'autre se situe, mais le regard de la Gorgone ne touche Persée que si le segment entre les deux ne contient aucun point de l'obstacle. Dans ce cas Persée est pétrifié.

Soit d_0 un réel. La Gorgone choisit initialement son point de départ en dehors de l'obstacle. Persée chosit ensuite son point de départ en fonction de celui de la Gorgone. Alors la Gorgone commence par essayer de toucher Persée de son regard. Si cela réussit elle le pétrifie. Sinon elle choisit un point qui n'est pas dans l'obstacle et qui est à distance au plus d_0 de là où elle est et s'y rend. Puis Persée, qui sait où la Gorgone est en train d'aller, choisit un point à distance au plus 1 de là où il est hors de l'obstacle et s'y rend. Lorsque les deux sont arrivés à leur nouveau point, la Gorgone essaye à nouveau de toucher Persée de son regard, et ainsi de suite. Le réel d est dit *admissible* pour l'obstacle $\mathcal{O}$ si, avec cet obstacle, Persée dispose d'une stratégie qui lui permet de ne jamais être pétrifié, quoi que fasse la Gorgone, si $d_0 = d$.

La figure 9 illustre un exemple de poursuite entre Persée et la Gorgone, dans le cas où l'obstacle est un triangle plein et $d_0 = 2$. Les points successifs où se situe Persée sont les points P_0, P_1, P_2, P_3, et les points sucessifs où se situe la Gorgone sont les points G_0, G_1, G_2, G_3. Après 3 étapes, le regard de la Gorgone touche enfin Persée : ce dernier est pétrifié.

1. Quels sont les réels admissibles si l'obstacle est une droite ? Si c'est un point ? Si c'est un segment de longueur $\ell > 0$?

2. L'obstacle est un disque ouvert de rayon $r > 0$. Quels sont les réels admissibles pour cet obstacle en fonction de r ? On pourra commencer par le cas $r = 1$.

3. L'obstacle est un polygone plein. Quels sont les réels admissibles pour cet obstacle ? On pourra commencer par étudier des polygones particuliers.

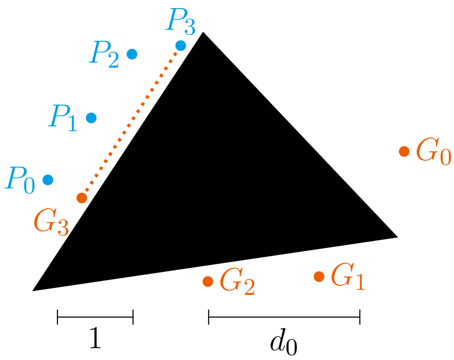


FIGURE 9 – Une poursuite possible entre Persée et la Gorgone

4. Soit $A_{\mathcal{O}}$ l'ensemble des réels admissibles pour un obstacle $\mathcal{O}$. Quels sont les ensembles qui peuvent s'écrire $A_{\mathcal{O}}$ pour un certain obstacle $\mathcal{O}$?

5. À présent, la Gorgone doit se déplacer d'une distance exactement d_0 et Persée doit se déplacer d'une distance exactement 1 à chaque étape, c'est-à-dire que pour tout i, $G_iG_{i+1} = d_0$ et $P_iP_{i+1} = 1$. Reprendre les questions précédentes dans ce cadre.

À présent, la Gorgone se déplace en permanence à vitesse au plus v_0 en regardant en direction de Persée, et Persée se déplace en permanence à vitesse au plus 1 pour l'éviter. Pour $v \in \mathbb{R}_+^*$, une *trajectoire à vitesse au plus* v est une application T de $\mathbb{R}_+$ dans le plan telle que :

- pour $t \in \mathbb{R}_+$, $T(t)$ n'est pas dans l'obstacle ;
- pour tous $t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+$, la distance entre $T(t_1)$ et $T(t_2)$ est d'au plus $v \times |t_1 - t_2|$.

Une *stratégie* pour Persée est une application $\mathcal{S}$ qui à une trajectoire T_G à vitesse au plus v_0 associe une trajectoire $\mathcal{S}(T_G) = T_P$ à vitesse au plus 1, de sorte que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, la valeur $\mathcal{S}(T_G)(t) = T_P(t)$ ne dépende que des valeurs de la fonction T_G entre le temps 0 et le temps t (Persée ne peut pas prédir là où sera la Gorgone dans le futur). En particulier le point de départ de Persée $\mathcal{S}(T_G)(0) = T_P(0)$ ne peut dépendre que du point de départ de la Gorgone $T_G(0)$ (Persée choisit son point de départ en fonction de celui de la Gorgone).

Une stratégie $\mathcal{S}$ est *gagnante* pour Persée si pour toute trajectoire T_G à vitesse au plus v_0, à tout instant $t \geqslant 0$, la Gorgone ne voit pas Persée, ie. le segment entre $T_G(t)$ et $T_P(t) = \mathcal{S}(T_G)(t)$ intersecte l'obstacle.

Un réel v est dit *admissible* pour un obstacle $\mathcal{O}$ s'il existe une stratégie gagnante pour Persée si $v_0 = v$.

6. Reprendre les questions précédentes avec ces nouvelles règles.

7. Proposer et étudier d'autres directions de recherche

* * *