$\mathbb{TFJM}^2$

Problèmes du 13ème Tournoi Français des Jeunes Mathématiciennes et Mathématiciens

VERSION 1.2 MISE À JOUR LE 27 FÉVRIER 2023

Préambule

Ces problèmes sont difficiles et sont proposés par des chercheurs et étudiants en mathématiques. Ils n'admettent pas toujours, à la connaissance du jury, de solution complète mais sont accessibles à des lycéens, c'est-à-dire que les auteurs sont certains qu'un travail de recherche élémentaire peut être mené sur ces problèmes. Le jury n'attend pas des candidats qu'ils résolvent entièrement un problème, mais qu'ils en comprennent les enjeux, résolvent des cas particuliers, repèrent les difficultés et proposent des pistes de recherche. Attention, les questions ne sont pas toujours classées par ordre croissant de difficulté. Enfin, il n'est pas nécessaire de traiter tous les problèmes : chaque équipe peut en refuser un certain nombre sans pénalité. On se reportera au règlement pour plus de détails.

 En cas de questions concernant le tournoi ou les énoncés, consulter le site `www.tfjm.org` ou contacter les organisateurs à l'adresse `contact@tfjm.org`.

Table des matières

Mots-clés :
1. Géométrie, optimisation 2. Graphes 3. Arithmétique 4. Systèmes dynamiques 5. Géométrie 6. Graphes, combinatoire 7. Géométrie, systèmes dynamiques 8. Combinatoire

Notations

$\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$	ensemble contenant les éléments $a_1, a_2, \dots, a_n$
$[\![a, b]\!] = \{a, a+1, \cdots, b-1, b\}$	intevalle d'entiers
$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$	ensemble des nombres entiers positifs
$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}$	ensemble des nombres entiers strictement positifs
$\mathbb{R}_+$	ensemble des nombres réels positifs ou nuls
$\mathbb{R}_+^*$	ensemble des nombres réels strictement positifs

1. Philatélie

Roman est un philatéliste un peu particulier : il ne collectionne pas les timbres, mais les tampons.

Il dispose d'un paquet plat d'une certaine forme, et cherche à y apposer le plus grand tampon carré possible sans déborder. On suppose que les paquets sont dans une orientation fixée, et que la tamponneuse ne peut apposer que des tampons carrés dont les côtés parallèles aux axes d'un repère orthogonal fixé.

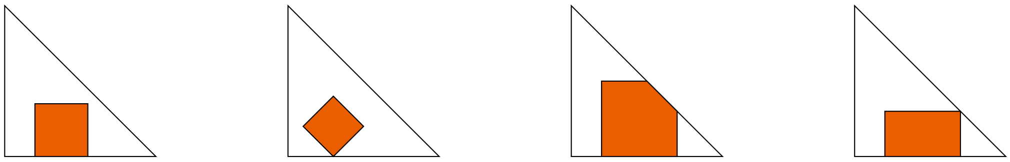


Figure 1 – Exemples de tampons dans le cas de la question 1c). Le premier est le seul valide, car le deuxième est mal orienté, le troisième déborde et le dernier n'est pas carré.

1. Quel est le plus grand tampon possible si le paquet est :

— Un rectangle de côtés a et b (avec $a \neq b$), dont les côtés sont parallèles aux axes ?

— Un disque de rayon r ?

— Un triangle isocèle rectangle dont les côtés de l'angle droit, de longueur a, sont parallèles aux axes ?

2. On suppose que le paquet est un polygone convexe, c'est-à-dire que tous ses angles intérieurs mesurent entre 0° et 180° strictement. Roman regarde le nombre de façons (potentiellement infini) d'inscrire un tampon de taille maximale sur son paquet. Quelles sont les nombres possibles ?

Après réflexion, Roman se dit que son paquet aurait plus de cachet avec 2 tampons plutôt qu'un seul, pas forcément de la même taille. Il cherche à maximiser l'aire totale des tampons mais, pour que cela reste lisible, ceux-ci n'ont pas le droit de se superposer (ils peuvent néanmoins avoir un segment en commun).

On note A_g la plus grande aire que Roman peut obtenir s'il appose d'abord un premier tampon de taille maximale, puis un second dans la place qui reste, et A_{dis} la plus grande aire qu'il peut obtenir s'il peut placer ses deux tampons comme il le souhaite, tant qu'ils sont disjoints.

Figure 2 – Exemples d'une paire de tampons valide dans le cas de la question 4c) (à gauche), et d'une paire qui n'est pas valide dans le cas 4c) mais qui l'est dans le cas 6c) (à droite).

3. A-t-on toujours $A_g = A_{dis}$? Si non, que peut valoir le ratio A_{dis}/A_g ?

4. Que vaut A_{dis} si le paquet est :

— Un rectangle de côtés a et b (avec $a \neq b$), dont les côtés sont parallèles aux axes ?

— Un disque de rayon r ?

— Un triangle isocèle rectangle dont les côtés de l'angle droit, de longueur a, sont parallèles aux axes ?

5. On suppose que le paquet est un polygone convexe. Combien peut-il y avoir de configurations de tampons qui atteignent A_{dis} ?

Après quelques essais, Roman se rend compte que des tampons superposés ne rendent pas si mal. On note A_{lib} la plus grande aire pour l'union de deux tampons de tailles quelconques lorsque Roman s'autorise à les superposer.

6. Que vaut A_{lib} si le paquet est :

— Un rectangle de côtés a et b (avec $a \neq b$), dont les côtés sont parallèles aux axes ?

— Un disque de rayon r ?

— Un triangle isocèle rectangle dont les côtés de l'angle droit, de longueur a, sont parallèles aux axes ?

7. Reprendre le problème si les tampons peuvent ne pas être parallèles aux axes. En particulier, chercher des formes de paquets pour lesquelles s'autoriser à ne pas être parallèle aux axes augmente le plus possible l'aire maximale.

8. Proposer et étudier d'autres pistes de recherche.

$* * *$

2. La montagne aux ruisseaux

Olympe est une apprentie démiurge. On lui a confié la construction d'une montagne, sur laquelle se trouvent $v \in \mathbb{N}^*$ villages. Pour cela, elle dispose d'un plan aérien P sur lequel on peut voir des villages et des ruisseaux reliant certains villages. Pour des raisons esthétiques, Olympe veut que chaque village se trouve à une altitude différente sur la montagne et qui soit un nombre entier de kilomètres : l'un se trouve à 1km, un autre à 2km, un autre à 3km, et ainsi de suite jusqu'au dernier qui se trouve à v km. Il y a au plus un ruisseau entre deux villages donnés, mais leur sens ne figure pas sur le plan. Les croisements de ruisseaux sont autorisés, car Olympe sait construire des aqueducs.

Une **orientation des ruisseaux** est un choix, pour tous les ruisseaux, d'un sens d'écoulement du courant. Étant donné une telle orientation des ruisseaux, il existe un certain nombre de façons d'attribuer aux v villages les altitudes 1km, 2km, ..., v km, de sorte que l'eau des ruisseaux s'écoule toujours du haut vers le bas. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note $n_k(P)$ le nombre d'orientations des ruisseaux de P telles qu'il existe exactement k manières différentes d'attribuer des altitudes aux villages de manière à respecter cette contrainte. Par exemple $n_0(P)$ est le nombre d'orientations des ruisseaux telles qu'il n'existe aucun manière d'attribuer aux v villages de P les altitudes 1km, 2km, ..., v km de sorte que l'eau des ruisseaux s'écoule toujours du haut vers le bas.

1. Étant donné un plan P avec v villages et r ruisseaux, combien d'orientations des ruisseaux existe-t-il ?

2. Quels sont les plans P que Olympe peut recevoir tels que $n_0(P) = n$ pour :

a) $n = 0$?

b) $n = 1$?

c) $n = 2$?

d) $n = 4$?

e) $n = 6$?

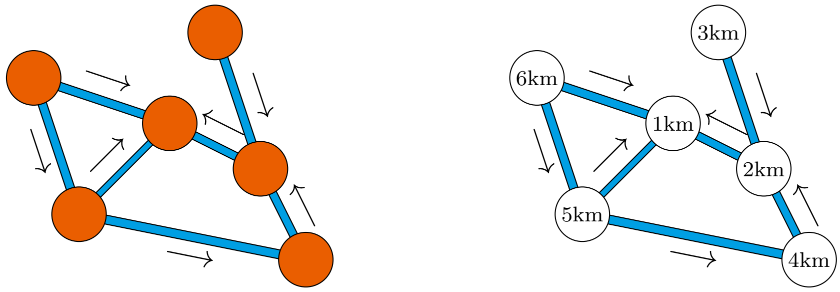
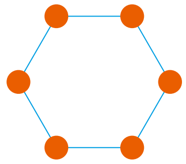
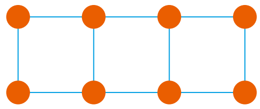


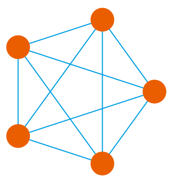
Figure 3 – Un exemple de plan et d'orientation des ruisseaux, et une manière de choisir les altitudes des villages



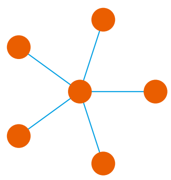
Le plan cycle C_6 avec $v = 6$ villages



Le plan quadrillage Q_8 avec $v = 8$ (v doit être pair)



Le plan complet K_5 avec $v = 5$



Le plan étoile E_6 avec $v = 6$

Le plan ligne L_4 avec $v = 4$

Figure 4 – Des exemples de plans.

3. Pour quels entiers $n \geqslant 0$ existe-t-il un plan P tel que $n_0(P) = n$?

Pour $v \in \mathbb{N}^*$, on définit différents plans de v villages : le cycle C_v, le quadrillage Q_v (seulement pour v pair), le plan complet K_v, l'étoiles E_v et la ligne L_v (voir figure 4).

4. Calculer $n_1(P)$ dans les cas suivants :

a) P est le cycle C_v,

b) P est le quadrillage Q_v.

5. Pour quels entiers $n \geqslant 0$ existe-t-il un plan P tel que $n_1(P) = n$?

6. Calculer $n_k(P)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ dans les cas suivants :

a) P est un plan complet K_v,

b) P est un plan étoile E_v,

c) P est un plan ligne L_v.

7. Caractériser les couples d'entiers (k, n) tels qu'il existe un plan P satisfaisant $n_k(P) = n$.

8. Proposer et étudier d'autres pistes de recherche.

* * *

3. Appoint monétaire

Dans une galaxie lointaine, très lointaine, le petit prince se déplace de planète en planète à la recherche de marguerites qu'il souhaite acheter. Chaque planète a son propre système monétaire S, qui est l'ensemble des valeurs que peuvent prendre les pièces de monnaie sur cette planète. Les pièces de monnaie ont toutes des valeurs entières strictement positives. Dans cette galaxie, on ne rend pas la monnaie. Dans toute la suite, on supposera toujours que $1 \in S$ afin que tous les prix soient réalisables comme somme de valeurs dans S. Par exemple, le système monétaire des « pièces rouges de centimes d'euro » est $S = \{1, 2, 5\}$.

Lorsque le petit prince arrive sur une planète avec une certaine somme d'argent $x \in \mathbb{N}$, il convertit son argent dans le système monétaire S mais ne sait pas comment on va lui faire la monnaie, c'est-à-dire quelles pièces il va recevoir. Il ne peut acheter une marguerite que s'il est sûr d'avoir l'appoint pour le prix indiqué. Par exemple, si son argent est de $x = 4$, dans le système monétaire $S = \{1, 2, 5\}$, il peut avoir :

— 2 pièces de valeur 2,

— 1 pièce de valeur 2 et 2 pièces de valeur 1,

— 4 pièces de valeur 1.

Il est donc sûr d'avoir l'appoint pour les prix 0, 2 et 4 mais pas pour les prix 1 et 3. On notera $\mathcal{A}_S(x)$ l'ensemble des prix pour lesquels il est certain d'avoir l'appoint dans le système S pour une quantité x d'argent. Par exemple $\mathcal{A}_{\{1,2,5\}}(4) = \{0, 2, 4\}$.

1. Le petit prince est sur une planète où $S = \{1, 3, 10\}$. Pour quels prix est-il sûr d'avoir l'appoint si

a) son argent est de $x = 10$?

b) son argent est de $x = 100$?

c) son argent est de $x = 10^n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$?

Les marchands de marguerites ne veulent pas négocier les prix et cherchent des prix $p \geqslant 1$ tels que si on a l'appoint pour ce prix, alors on n'est pas certain d'avoir aussi l'appoint pour un prix plus petit autre que 0 et p, c'est-à-dire que $\mathcal{A}_S(p) = \{0, p\}$. Un tel prix est dit S**-primaire** (par convention, 0 n'est jamais S-primaire).

Par exemple, pour $S = \{1, 2, 5\}$, le prix 4 n'est pas S-primaire car si on a l'appoint pour 4 alors on est aussi certain d'avoir l'appoint pour 2. Mais 6 est S-primaire car $6 = 5 + 1 = 2 + 2 + 2$ donc si on a l'appoint pour 6, on n'est pas sûr d'avoir l'appoint pour 1, 2, 3, 4 ou 5. On notera $\mathcal{P}_S$ l'ensemble des prix S-primaires. Par exemple, $1, 2, 5, 6 \in \mathcal{P}_{\{1,2,5\}}$ mais $0, 3, 4 \notin \mathcal{P}_{\{1,2,5\}}$.

2. Quels sont les prix S-primaires si :

a) $S = \{1, u\}$ pour $u \geqslant 2$?

b) $S = 1 + 2\mathbb{N}$ l'ensemble des nombres impairs ?

c) $S = \{2^n,\ n \in \mathbb{N}\}$ l'ensemble des puissances de 2 ?

d) $S = \{1, v, w\}$ pour $w > v \geqslant 2$?

e) S est l'ensemble des nombres premiers ou égaux à 1 ?

3. Déterminer l'ensemble des parties S de $\mathbb{N}^*$ telles que $\mathcal{P}_S$ est fini.

4. Donner un encadrement de la valeur du plus grand prix S-primaire lorsque S est fini, en fonction des valeurs des éléments de S et du nombre d'éléments de S. *On pourra commencer par traiter les cas (a) et (d) de la question 2.*

5. Trouver des conditions nécessaires et/ou suffisantes pour que $S = \mathcal{P}_S$.

On dit que p est un S**-appoint** de x si on a toujours l'appoint pour p quand on a l'appoint pour x. Un m-uplet $(p_1, \ldots, p_m)$ de prix S-primaires est appelé une S**-décomposition** de x si pour toute partie $J \subseteq [\![1, m]\!]$, le prix $x_J = \sum_{j \in J} p_J$ est un S-appoint de x ; autrement dit, n'importe quelle sous-somme (y compris une somme d'un seul élément) de ces prix $(p_1,\dots,p_m)$ est un S-appoint de x.

Par exemple, pour $S=\{1,2,5\}$ et $x=4$, le couple $(2,2)$ est une S-décomposition de x mais le triplet $(1,1,2)$ n'en est pas une car, par exemple, $1+2=3$ n'est pas un S-appoint de 4. De même, (4) n'est pas une S-décomposition de 4 car 4 n'est pas S-primaire.

6. Pour quels systèmes S tout prix x admet-il au moins une S-décomposition ?

7. Existe-t-il des systèmes S pour lesquels :

a) S est fini et toute S-décomposition est unique (à permutation des nombres S-primaires près) ?

b) S est infini et toute S-décomposition est unique ?

c) S est de la forme $S=\{1,u,v\}$ avec $1<u<v$ et toute S-décomposition est unique ?

d) au moins un prix x admet au moins deux S-décompositions qui ne sont pas permutations des termes l'une de l'autre ?

8. Trouver des conditions nécessaires et/ou suffisantes pour qu'un système S vérifie la propriété a) de la question précédente.

9. Proposer et étudier d'autres pistes de recherche.

* * *

4. Musique déformée

Perrine joue avec un logiciel de montage audio. Elle dispose initialement d'une bande son d'une minute pendant laquelle sont jouées $n \geqslant 1$ notes distinctes, chacune de durée $1/n$. Le logiciel dispose d'une fonctionnalité permettant d'augmenter ou de diminuer la résolution du son. Si Perrine choisit une nouvelle résolution $m \geqslant 1$, le logiciel crée un nouvel audio d'une minute également, constitué de m notes choisies de la manière suivante : pour tout $1 \leqslant k \leqslant m$, pour trouver la k-ième note jouée, le logiciel regarde l'intervalle de temps pendant lequel elle doit être jouée dans le nouveau fichier, prend son milieu et choisit la note qui était jouée à cet instant dans l'ancien fichier. Si ce milieu tombe pile entre deux notes dans l'ancien fichier, le logiciel met un silence.

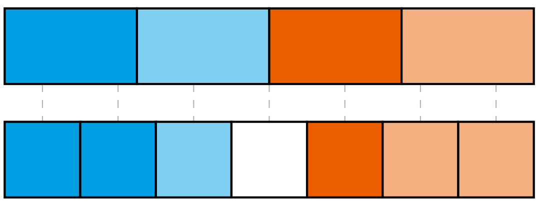


Figure 5 – Exemple de changement de résolution.

La figure 5 représente un changement de résolution où on passe de $n=4$ à $m=7$. Chaque case représente une note, les couleurs représentent des notes différentes, le blanc correspond à un silence.

Perrine s'intéresse aux bandes son obtenues après plusieurs transformations successives de ce type.

1. Pour chacun des événements suivants, dire s'il peut arriver ou non après un nombre fini d'opérations :

a) Une des notes présente dans le fichier initial disparaît.

b) Les notes ne sont plus deux à deux distinctes.

c) Un silence apparaît.

d) Un silence disparaît.

e) Toutes les notes sont les mêmes.

f) La bande son ne contient que des silences.

2. Dans chacun des cas de la question précédente, quel est le nombre minimal d'opérations qui donnent ce résultat, en fonction de n ?

3. On choisit $1 \leqslant k \leqslant n$. Reprendre les questions 1 et 2 si Perrine s'interdit de créer un fichier de longueur strictement plus petite que k, ie. avec strictement moins de k notes (pas forcément distinctes) et silences.

4. Le logiciel ne peut maintenant travailler qu'avec des bandes son de longueur impaire.

a) Est-il possible qu'un silence apparaisse ?

b) Perrine part d'un fichier de longueur $n=3$, fait une suite d'opérations sans passer par un fichier de longueur 1 et retombe sur un fichier de longueur 3. Est-il possible que le fichier initial et le fichier final soient différents ?

c) Perrine part de n notes, fait une suite d'opérations qui la ramène à n notes sans que le nombre de notes ne soit jamais descendu en dessous de n. Combien de notes différentes peut contenir le fichier final ? Plus généralement, quels sont les fichiers finaux possibles ?

5. Reprendre la question 4 sans se restreindre aux longueurs impaires.

Perrine ne manipule maintenant plus des son mais des images. Son image de 1 mètre par 1 mètre est partagée en $n \times n'$ rectangles de taille $1/n \times 1/n'$de couleurs différentes. Le logiciel peut la transformer en une image de $m \times m'$ rectangles de taille $1/m \times 1/m'$ de la manière suivante : pour tout $1 \leqslant k \leqslant m$, $1 \leqslant k' \leqslant m'$, pour trouver la couleur du rectangle (k,k'), le logiciel regarde le centre du rectangle (k,k') et lui attribue la couleur de ce point dans l'ancienne image. Si ce point tombe pile entre deux rectangles de l'ancienne image, le nouveau rectangle s'éteint et devient noir.

6. Reprendre toutes les questions précédentes dans ce cadre.

7. Proposer et étudier d'autres pistes de recherche.

* * *

5. ANGLES ENTIERS

Pour passer le temps, Emmanuel aime dessiner des figures géométriques. Cependant, quand il dessine des figures quelconques, il n'arrive pas toujours à bien mesurer les angles avec son rapporteur. C'est pourquoi il se restreint aux figures possédant des angles entiers.

On dit qu'un angle est **entier** si sa mesure, en degrés, est un nombre entier (un tour vaut 360°). On dit qu'un ensemble de points du plan est **aux angles entiers** s'ils sont deux à deux distincts, pas tous alignés et si pour tout triplet de points de cet ensemble, le triangle formé (éventuellement aplati) possède trois angles entiers.

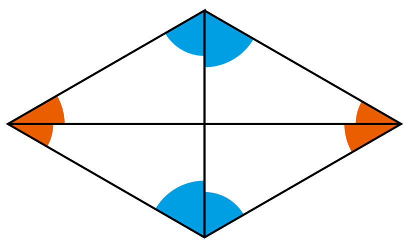


FIGURE 6 – Exemple de figure aux angles entiers, formée de deux triangles équilatéraux : les angles oranges et bleus mesurent tous 30° et 60° respectivement

1. Pour quels $n \geqslant 3$ le n-gone régulier est-il aux angles entiers ?

Un polygone est dit **convexe** si tous ses angles intérieurs mesurent strictement entre 0° et 180°.

2. Quel est le n maximal tel qu'il existe un n-gone convexe aux angles entiers ? Et en imposant que le polygone ne soit pas régulier ?

3. Reprendre la question précédente si on impose que :

a) Il existe quatre points qui ne sont pas sur un même cercle.

b) Quatre points ne sont jamais sur un même cercle.

4. On n'impose plus que les points forment un polygone convexe. Quel est le nombre maximal de points formant un ensemble aux angles entiers ? Même question en imposant à la fois que trois points ne soient jamais sur une même droite et quatre points ne soient jamais sur un même cercle.

5. Emmanuel trace maintenant deux droites parallèles distinctes et s'impose que chaque point soit sur une des deux droites. Quel est le nombre maximal de points formant un ensemble aux angles entiers sous cette contrainte ? Même question en imposant de plus qu'il y ait autant de points sur chaque droite.

6. Emmanuel ne trace plus deux droites parallèles mais deux droites formant un angle θ entier. Reprendre la question précédente en fonction de θ.

7. Reprendre le problème si le rapporteur d'Emmanuel n'est plus gradué en degrés mais en grades (un tour vaut 400^g).

8. Proposer et étudier d'autres pistes de recherche.

* * *

6. Tribus hiérarchiques

Sur un archipel lointain vivent des tribus, chacune avec un ordre social bien établi. Deux individus sont en **lien social** si l'un est le supérieur de l'autre. Une **hiérarchie** est un ensemble de liens sociaux tel qu'il y ait au plus un lien social entre deux personnes différentes. Pour deux individus différents A et B, on note $A \to B$ si A est le supérieur de B. On prendra garde au fait que si A est hiérarchiquement supérieur à B et B est hiérarchiquement supérieur à C alors A n'est **pas** forcément supérieur à C. Autrement dit, si on a $A \to B$ et $B \to C$, alors on n'a pas nécessairement $A \to C$.

Sur l'île de Tournoasis vit une tribu organisée dans une hiérarchie **complète** : pour toute paire d'individus A et B, on a soit $A \to B$, soit $B \to A$.

Deux personnes mécontentes de la hiérarchie peuvent déclencher une émeute. Une **émeute** déclenchée par $A \to B$ transforme la hiérarchie en trois étapes :

a) Pour toute suite de liens sociaux $C \to A \to B \to D$ avec C différent de D, on ajoute un lien social $C \to D$ (à ce stade, on peut avoir plusieurs liens sociaux entre deux personnes),

b) On renverse la hiérarchie entre A et B : $B \to A$ (d'où l'émeute),

c) On simplifie la hiérarchie : s'il y a plusieurs liens sociaux entre deux personnes X et Y, alors on les remplace par le lien social majoritaire, ou bien par aucun lien social en cas d'égalité. Ainsi, $X \rightrightarrows Y$ devient $X \to Y$ et $X \rightleftarrows Y$ devient $X \quad Y$.

Comme la hiérarchie doit être complète sur Tournoasis, si le résultat final laisse des paires de personnes sans lien social, alors l'émeute ne peut pas avoir lieu.

La figure 7 représente trois exemples d'émeute entre A et B. La situation initiale est en haut et le résultat en bas. La configuration à gauche est cohérente, et celle à droite est complète. Sur Tournoasis, l'émeute entre C et D dans l'exemple à droite ne peut avoir lieu.

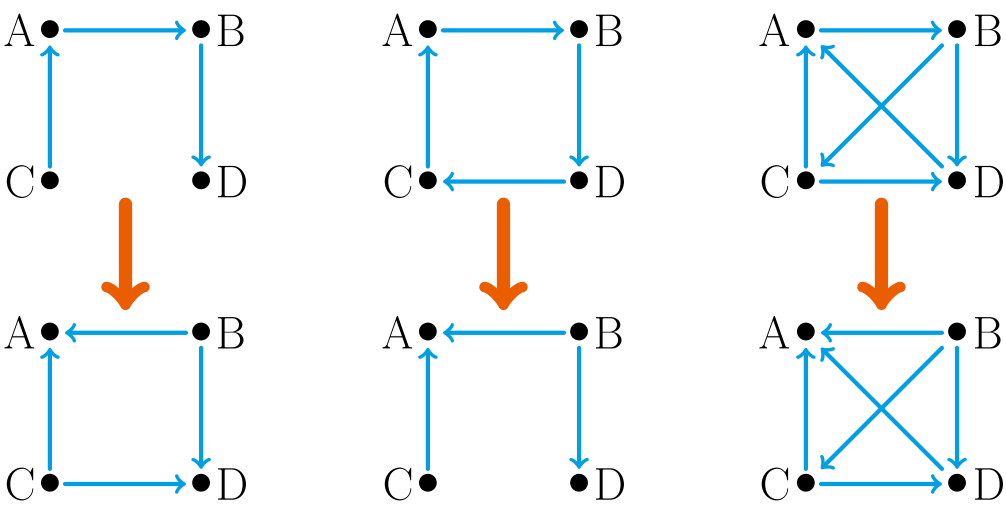


FIGURE 7 – Trois exemples d'émeutes entre A et B.

1. Existe-t-il des hiérarchies stables, dans lesquelles aucune émeute ne peut éclater ? Si oui, pour quel nombre d'individus ?

Pour deux hiérarchies H_1 et H_2, on écrit $H_1 \to H_2$ s'il y a une suite finie d'émeutes qui transforme H_1 en H_2.

2. Est-il vrai que si $H_1 \to H_2$, alors on a aussi $H_2 \to H_1$?

Une **révolution** est une suite d'émeutes telle que le résultat final a renversé toutes les flèches.

3. Caractériser les hiérarchies pour lesquelles une révolution est possible.

4. Pour deux hiérarchies complètes H_1 et H_2, décider si on a toujours $H_1 \to H_2$. Si non, donner des conditions nécessaires et suffisantes pour avoir $H_1 \to H_2$.

Sur l'île voisine, Courtoasis, vit une tribu similaire. Chez eux, les hiérarchies ne sont pas nécessairement complètes, mais elles doivent être **cohérentes**, c'est-à-dire qu'il n'y a pas d'individus $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ($n > 1$) avec $A_1 \to A_2 \to \ldots \to A_n \to A_1$. Si une émeute rend la hiérarchie non-cohérente, alors elle ne peut pas avoir lieu.

5. Reprendre les questions précédentes dans ce cadre.

Sur une troisième île, Carquoisis, vit une tribu avec une hiérarchie moins stricte, pas nécessairement complète ni cohérente. Une émeute peut donc toujours avoir lieu.

6. Reprendre les questions 2, 3 et 4 dans ce cadre.

7. Proposer et étudier d'autres pistes de recherche.

* * *

7. MIROIRS ET LASERS

Clémence dispose d'un triangle équilatéral ABC de telle sorte qu'il y ait des miroirs sur les trois côtés du triangle et qu'il y ait un trou (de taille infiniment petite) sur chacun des sommets. Elle s'amuse a envoyer un rayon laser **parfait**, c'est-à-dire sans épaisseur, depuis le trou qui se trouve au point A. Chaque tir de rayon laser est réfléchi sur les côtés du triangle en suivant les règles de la mécanique classique : l'angle rentrant que fait le laser avec la normale du miroir est le même que l'angle sortant (voir Figure 8). Il fini par ressortir du triangle ou reste emprisonné pour toujours.

Pour chaque tir t de rayon laser que Clémence effectue, on peut donc noter $n(t) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ le nombre de fois que le rayon laser se réfléchit sur les miroirs avant de ressortir.

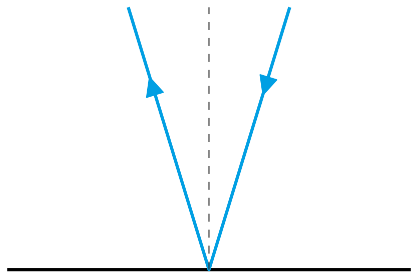


Figure 8 – Un exemple de réflexion d'un rayon laser (en bleu) sur un miroir (en noir).

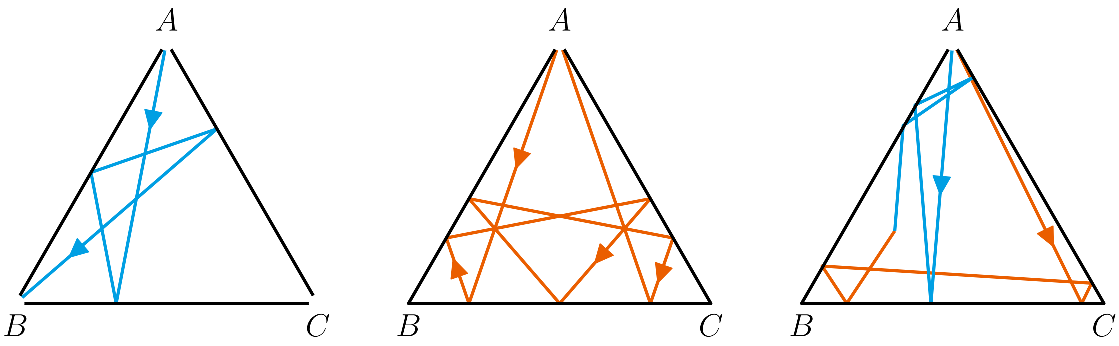


Figure 9 – Trois exemples de tirs qui se reflètent sur les parois du triangle.

La figure 9 représente, de gauche à droite : un exemple de trajectoire avec 3 reflets dans un triangle à trois trous, de trajectoire à 7 reflets avec un triangle à un trou, et de deux trajectoires qui se retrouvent au même endroit après avoir parcouru exactement la même distance (voir question 3).

1. Clémence essaie de comprendre l'ensemble des valeurs que peut prendre $n(t)$.

a) Quelles sont les valeurs que $n(t)$ peut prendre ? On pourra commencer par s'intéresser aux petites valeurs possibles de $n(t)$: peut-on avoir $n(t) = 1, 2, 3, 4$ ou 5 ? Existe-t-il des tirs t avec $n(t) = \infty$, c'est-à-dire que le rayon laser ne ressort jamais du triangle ABC ?

b) Soit n un entier. Trouver combien de tirs t différents vérifient $n(t) = n$.

2. On suppose maintenant qu'il n'y a plus qu'un trou au sommet A et que de plus les tirs que Clémence effectue ne peuvent pas passer par les sommets B et C pour éviter des problèmes dans la définition des rebonds. Reprendre la question 1 dans ce cadre.

3. Clémence décide d'effectuer deux tirs simultanés distincts depuis le sommet A dont on suppose qu'ils ne ressortent jamais du triangle. En prenant une vitesse de la lumière finie constante, ces deux tirs progressent donc à vitesse finie au sein du triangle. Si les deux rayons sont au même endroit à un certain instant $s > 0$ (c'est-à-dire après avoir parcouru la même distance), existe-t-il forcément un instant $s' > s$ auquel les rayons sont à nouveau au même endroit ? Même question si les tirs partent de deux sommets différents A et B.

4. Est-il possible qu'un rayon laser partant du point A passe par tous les points du triangle (y compris l'intérieur) sauf les points B et C ? Dans cette question seulement on suppose que le rayon laser est **épais**, il part toujours du point A mais avec un angle $\alpha > 0$, reprendre la question précédente sous cette hypothèse.

5. Reprendre les questions 1, 2 et 3 dans le cas où ABC est un triangle rectangle isocèle (il y a deux cas à traiter, ou bien le segment BC est l'hypoténuse ou bien il ne l'est pas).

6. Clémence s'intéresse maintenant au cas de triangles beaucoup plus généraux. Elle note maintenant $n_{ABC}(t)$ le nombre de rebonds d'un tir t dans un triangle ABC quelconque où seulement le sommet A est troué.

a) Quelles sont les valeurs possibles pour $n_{ABC}(t)$ lorsque ABC et t sont libres ?

b) Existe-t-il des triangles pour lesquels $n_{ABC}(t)$ ne peut prendre que la valeur ∞ quel que soit le tir t effectué ? Si oui, les caractériser autant que possible.

c) On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des valeurs que peut prendre $n_{ABC}(t)$ dans la question précédente. Existe-t-il un triangle XYZ de telle sorte que les valeurs de $n_{XYZ}(t)$ soient exactement $\mathcal{S}$ lorsque t parcourt l'ensemble des tirs possibles ?

d) Reprendre les questions 1 et 2 pour des triangles quelconques.

7. Reprendre les questions 1, 2, 3 et 6 dans le cadre du carré et de l'hexagone régulier, puis des polygones réguliers quelconques.

8. Proposer et étudier d'autres pistes de recherche.

* * *

8. Graine de deck

Nicolas joue à un jeu de construction de deck de cartes et cherche à obtenir le paquet parfait, quitte à recommencer de nombreuses fois.

Soient $k,n \in \mathbb{N}^*$ avec k divisant n et $k \geq 2$. Le paquet de Nicolas contient un total de n cartes comportant chacune un symbole, avec éventuellement des cartes identiques. Lors de son tour, il pioche les k premières cartes de son paquet et les joue dans l'ordre de son choix. Les cartes sont défaussées au fur et à mesure qu'elles sont jouées. Une fois que son deck est vide (après n/k tours), sa défausse est retournée puis mélangée pour former un nouveau deck, et il joue une seconde fois toutes ses cartes de la même manière. Dans le cas particulier où $k = n$, Nicolas pioche le paquet entier en une seule fois donc l'ordre initial des cartes n'a pas d'importance.

Avant d'être mélangée, la défausse contient les cartes dans l'ordre où elles ont été jouées. On suppose que le mélange effectué est toujours le même : la première carte est toujours au même endroit après mélange, la deuxième aussi, la troisième aussi... Par exemple avec quatre cartes, un mélange possible est $\sigma = \begin{pmatrix} 1234 \\ 3142 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire que les cartes en positions $1,2,3,4$ dans le paquet avant mélange se retrouvent en position $3,1,4,2$ après mélange. Si avant mélange le paquet est (A,B,A,C) alors après mélange il sera (B,C,A,A).

Nicolas connaît la composition de son deck et son ordre initial mais pas le mélange. Il peut faire autant de parties qu'il le souhaite.

La figure 10 représente deux exemples de parties avec $n = 6$ cartes, 3 cartes A, 3 cartes B, qui sont initialement dans l'ordre (A,B,A,B,A,B), où les cartes sont jouées $k = 3$ par 3 (donc une partie est composée de $n/k = 2$ tours) et où le mélange est $\sigma = \begin{pmatrix} 123456 \\ 152346 \end{pmatrix}$. Dans chaque exemple, la colonne de gauche est l'état du paquet en début de partie, celle du milieu est l'état du paquet après qu'il a joué toutes ses cartes une fois et celle de droite est l'état du paquet après mélange. Ces choix montrent que les objectifs $(ABABAB,(AAA,BBB))$ et $(ABABAB,(AAB,ABB))$ sont tous deux réalisables avec le mélange σ (voir question 3). Le second choix permet de distinguer σ de $\begin{pmatrix} 123456 \\ 153246 \end{pmatrix}$ mais pas le premier (car l'état final du paquet est le même).

1. Dans cette question, le but de Nicolas est de trouver le mélange σ le plus rapidement possible. L'ordre initial, avant que la partie commence, est toujours le même. De combien de parties a-t-il besoin au minimum lorsque :

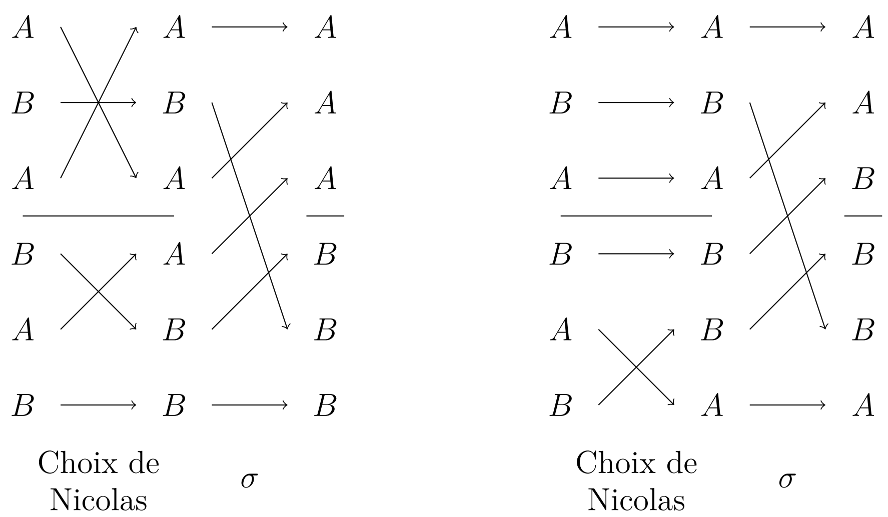


FIGURE 10 – Deux exemples de parties.

a) $k = n$, et toutes les cartes sont différentes ?

b) $k = n$, et le deck est constitué de 2 cartes différentes, une unique et l'autre en $n - 1$ exemplaires ?

c) $k = n$, n est pair et le deck est constitué de 2 cartes différentes, chacune en $n/2$ exemplaires ?

d) $k = 2$, n est pair, le deck est constitué de 2 cartes différentes, chacune en $n/2$ exemplaires, et l'ordre initial est une alternance parfaite des deux cartes ?

e) $k = n$ et le deck est constitué de a cartes différentes, chacune en n/a exemplaires, pour un certain a qui divise n ?

2. En fonction de k et de n, caractériser les compositions ordonnées initiales du paquet de départ pour lesquels Nicolas peut parvenir à coup sûr à trouver σ.

Nicolas ne s'intéresse désormais plus au mélange σ mais veut seulement obtenir la partie parfaite. Il sait quelles sont les cartes qu'il doit y piocher lors du premier tour, puis lors du deuxième tour, et ainsi de suite.

On note P_i l'ensemble des k cartes que Nicolas souhaite piocher lors du i-ième tour après mélange dans une partie parfaite. On appelle **objectif** pour Nicolas la donnée d'une composition ordonnée initiale $\mathcal{O}$ du deck, et d'un découpage de l'ensemble des cartes en n/k parties de taille k, de la forme $(P_1, \ldots, P_{n/k})$. L'ordre des cartes au sein de chaque P_i n'importe pas puisqu'elles sont tirées au même tour.

Un objectif est dit **réalisable** pour un mélange σ lorsque Nicolas peut jouer ses cartes dans un certain ordre à partir de $\mathcal{O}$ pour, après mélange, obtenir exactement les cartes correspondant à l'ensemble P_1, puis à l'ensemble P_2, etc.

3. Quels sont les objectifs réalisables quel que soit le mélange σ ?

4. Quels sont les σ qui rendent réalisables le moins d'objectifs, dans les cas suivants :

a) $k = 2$, et toutes les cartes sont différentes ?

b) $k = 2$, et le deck est constitué de 2 cartes différentes, chacune en $n/2$ exemplaires, qui alternent parfaitement ?

5. Reprendre la question précédente, mais en rendant réalisable le plus d'objectifs.

Nicolas veut maintenant savoir si son objectif, dont l'ordre initial est celui de la partie, est réalisable. L'ordre des cartes, avant chaque partie, est toujours le même.

6. En fonction de son objectif, de combien de parties Nicolas a-t-il besoin au minimum pour savoir s'il est réalisable dans les cas suivants :

a) $k = 2$, et toutes les cartes sont différentes ?

b) $k = 2$, et le deck est constitué de 2 cartes différentes, chacune en $n/2$ exemplaires, qui alternent parfaitement ?

7. En fonction de k, n et de la répartition des cartes, quels sont les objectifs tels qu'il est le plus difficile de savoir s'ils sont réalisables (autrement dit tels que le nombre minimum de parties dont Nicolas a besoin pour savoir s'ils sont réalisables est le plus grand) ?

8. Proposer et étudier d'autres pistes de recherche.

* * *