

# TFJM<sup>2</sup>

## TOURNOI FRANÇAIS DES JEUNES MATHÉMATIENNES ET MATHÉMATIENS

### Fiche pratique : Conseil pour la rédaction des solutions

Il est essentiel que tout le monde lise le **sujet en entier**. Les problèmes toujours sont indépendants et les questions ne sont pas toujours organisées de la plus facile à la plus dure.

Il est important d'essayer de rechercher au moins un peu chaque problème. Pour le tournoi, il faudra en rendre 5 pour ne pas risquer de pénalité (cf. fiche tirage au sort). Vous pourrez donc au fur et à mesure **vous concentrer sur les 5 problèmes** qui vous intéressent le plus.

Même pour les problèmes non rendus, **conservez vos brouillons** et idéalement organisez-les. Cela permet de ne pas se retrouver perdu si quelqu'un doit passer comme opposant ou rapporteur sur un problème non traité.

Pour bien organiser le travail, il vaut mieux décider d'**un ou deux référents par problème traité**, qui seront les personnes qui centraliseront les idées, rédigeront les solutions et qui passeront éventuellement à l'oral si le problème est tiré pendant le tournoi. Au fur et à mesure de l'avancement, vous serez peut-être naturellement amenés à changer de référents.

Même s'il y a des référents par problème, il est essentiel que **tout le monde puisse proposer des idées sur tous les problèmes**, même si ces idées n'aboutissent pas. Cela doit rester un travail d'équipe !

Il est important que vous vous **expliquiez vos idées mutuellement**. Expliquer ses idées aux autres est la meilleure façon de s'assurer qu'on les a bien comprises soi-même. De plus, si la personne en face n'est pas convaincue, elle vous le fera remarquer ce qui vous permettra d'améliorer vos explications. Enfin cela permet de clarifier la manière dont il faudra ensuite rédiger le raisonnement, pour qu'il soit **compréhensible par les autres équipes et par le jury**.

Les idées mettent souvent du temps à arriver (souvent plusieurs semaines), c'est pourquoi il est important de :

- **commencer très tôt à réfléchir** ;
- rester motivés, même si vous n'avez aucune idée pendant une ou deux semaines ;
- échanger, y compris sur ce qui n'a pas fonctionné pour comprendre pourquoi ;
- réfléchir à plusieurs questions (voire problèmes) à la fois, pour éviter de se lasser.

De même qu'il est important de commencer à réfléchir tôt, il est également important de **commencer à rédiger tôt car taper des mathématiques prend du temps**. Idéalement, il faut rédiger les idées au fur et à mesure que vous les avez. Cela vous permet de ne pas les oublier et de voir l'avancée du problème. De plus, rédiger une démonstration permet de voir rapidement si elle fonctionne ou non. Commencer à rédiger une semaine avant la date limite n'est pas une bonne idée !

La compréhension profonde d'un problème **prend du temps**, quel que soit votre niveau de mathématiques.

### Conseils pour la rédaction

L'objectif de la solution écrite est qu'elle soit **comprise par les autres équipes** et les membres du jury. D'une part, ils ne doivent avoir aucun doute sur le fait que ce qui est écrit est juste et convenablement démontré. D'autre part, ils doivent pouvoir suivre facilement votre raisonnement et comprendre la manière dont les choses s'articulent.

### Sur le fond

Dans vos solutions rédigées, vous aurez sûrement besoin d'introduire de nouvelles notations (voire de nouveaux objets). **Il faut introduire avec soin toutes les notations que vous allez utiliser** (les

notations standards n'ont pas besoin d'être réintroduites : n'écrivez pas « on désigne l'addition par le symbole  $+$  » !). Il faut alors être **très clair sur le type d'objet qu'on manipule** : un nombre, un point et un ensemble ne sont pas des objets de même nature ! On ne peut pas écrire « soit  $A$  l'ensemble des entiers divisibles par 5 et  $B = A + 3$  » (à moins de donner un sens précis à ce qu'on appelle  $A + 3$ ).

N'utilisez pas de symbole de logique ( $\forall, \exists, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ , etc.) au milieu de phrases.

Les notions qui dépassent le programme de mathématiques de lycée doivent être **soigneusement introduites**. Toute référence à d'autres travaux doit être dûment citée (titre, auteur, date, page, lien). Si la référence n'est pas facilement accessible (notamment si son accès est réservé ou payant), l'équipe doit en fournir un résumé suffisant.

**Il est important de bien comprendre ce qui est demandé dans l'énoncé.** Vous pouvez notamment solliciter votre encadrant. Pour rappel :

- **Une condition nécessaire** pour un énoncé  $A$  est une condition  $B$  telle que si  $A$  est vrai alors  $B$  est vraie (autrement dit si  $B$  est fausse alors  $A$  est faux). **Une condition suffisante** pour un énoncé  $A$  est une condition  $B$  telle que si  $B$  est vraie alors  $A$  est vrai.
- Demander si une propriété est vraie **en fonction de  $n$**  (ou d'un autre paramètre quelconque) signifie qu'il faut être capable, pour chaque valeur de  $n$ , de dire si elle est vraie ou fausse. Ce n'est pas la même chose que de savoir si elle est vraie quel que soit  $n$ . Il arrive que la dépendance en les paramètres du problème soit implicite (si un paramètre est introduit au début du problème, on s'attend généralement à ce que les réponses aux questions dépendent de ce paramètre).
- **Estimer** une quantité signifie l'encadrer aussi précisément que possible, c'est-à-dire trouver un majorant et un minorant. Quand cette quantité  $a_n$  dépend d'un paramètre, il peut être intéressant de regarder le comportement asymptotique, c'est-à-dire l'allure de la suite  $a_n$  quand  $n$  devient grand.
- Dans le cas d'un jeu à plusieurs joueurs, une **stratégie gagnante** pour un joueur  $A$  est une stratégie qui permet à  $A$  de gagner **quel que soit ce que jouent les autres joueurs**.

**Il est impératif de séparer clairement ce qui constitue une définition, une notation, une propriété, une proposition, un théorème, une démonstration, un exemple, une remarque et une conjecture**, vos lecteurs vous en remercieront ! Pour rappel :

- **Une définition** permet de donner un nom à une famille d'objets ayant un intérêt particulier. *Exemple : un entier  $n$  est dit **pair** s'il peut s'écrire sous la forme  $n = 2k$  où  $k$  est un autre entier.*
- **Une notation** permet d'associer un symbole à une définition. *Exemple : on note  $\mathcal{P}$  l'ensemble des nombres pairs.*
- **Une propriété, une proposition, un théorème** sont des énoncés mathématiques démontrés (donc vrais). Ils sont toujours composés d'hypothèses et de conclusions. En général, une propriété est un énoncé qui se rapporte à un type d'objet particulier et un théorème est un énoncé plus général et plus profond qu'une proposition, même la frontière entre ces notions reste floue. *Exemple : si un entier est divisible par 4, alors il est pair.*
- **Une démonstration** est « un blabla mathématique destiné à convaincre la personne en face que ce que vous racontez est vrai » (Vincent Jugé). Il s'agit d'un texte mathématique destiné à prouver ce que vous énoncez de manière à convaincre les personnes qui vous lisent que ce que vous dites est vrai. C'est le cœur de tout travail mathématique et sûrement l'étape la plus délicate. Le calcul en fait partie intégrante.
- **Un exemple** est un cas particulier qui sert à illustrer une définition ou un théorème afin de mieux le comprendre. *Exemple : 2, 6, 12 sont des exemples de nombres pairs ; 12 est divisible par 4 et on constate qu'il est pair, comme attendu.*
- **Une remarque** est un commentaire sur un théorème ou une démonstration. Cela peut permettre de comparer le résultat avec d'autres situations proches en soulignant les ressemblances et les différences. Cela peut également servir à apporter des explications supplémentaires sur les hypothèses faites dans un théorème, mentionner des cas limites, des contre-exemples ou des cas particuliers.
- **Une conjecture** est un énoncé mathématique non démontré mais dont on pense qu'il est vrai, par exemple grâce à des tests numériques, des cas particuliers ou par analogie avec d'autres théorèmes. *Exemple : tout nombre pair s'écrit comme somme de deux nombres premiers.*

Dans un théorème ou une démonstration, il est important de **bien séparer les hypothèses et les conclusions**. Dire «  $n$  est pair » peut vouloir dire « on suppose que  $n$  est pair » ou « on en déduit que  $n$  est pair », ce qui est très différent ! Il ne faut pas hésiter à **illustrer** les théorèmes et les démonstrations par des exemples, des explications et des figures. Là encore, vos lecteurs vous en remercieront ! Il peut également être utile d'annoncer où vous allez : « On va montrer que... puis... il reste à voir que... ».

N'en faites pas trop non plus : **la qualité d'un texte mathématique n'est jamais déterminée par**

**sa longueur !** Un exemple ou une remarque ne doivent être ajoutés que s'ils sont réellement intéressants. Il est également inutile de se répéter, de donner deux exemples quasiment identiques ou deux démonstrations très semblables (plutôt dire « des calculs semblables à ceux réalisés page ... montrent que ... »). Un texte mathématique est d'autant plus clair qu'il arrive à exprimer des idées précises de manière concise.

## Sur la forme

Les solutions écrites sont limitées à un **fichier pdf de 30 pages maximum** et 5Mo maximum. Toute page excédentaire sera automatiquement supprimée, le jury et les autres équipes ne les verront donc pas. Par ailleurs, si l'écriture est trop petite, le jury ne tiendra pas non plus compte de ce qu'il a trop de mal à lire (police 11 conseillée).

Il est fortement recommandé de **taper les solutions à l'ordinateur**.

La rédaction de solutions à des problèmes mathématiques est parfois très difficile à réaliser clairement et rapidement. Il existe un langage, appelé  $\text{\LaTeX}$ , qui a été développé spécialement pour ce faire. C'est avec ce langage que sont écrits les énoncés des problèmes, ainsi que la plupart des autres documents relatifs au TFJM<sup>2</sup>. Nous vous conseillons de l'utiliser, surtout si vous avez besoin d'écrire de nombreuses formules.

Pour vous aider, nous mettons à disposition ce fichier de base à modifier : <https://cloud.tfjm.org/index.php/s/hRq0c0HF4Wf1W7e/download>.

Pour travailler en collaboration sur des documents  $\text{\LaTeX}$ , il est possible d'utiliser le site internet <https://www.overleaf.com/>. Il n'est pas nécessaire de souscrire à la version payante : il existe en haut à droite un moyen de partager un lien de collaboration à plus que 2.

Évitez les ambiguïtés entre la numérotation des parties et celle des questions : si vous traitez le problème question par question, veillez à ce que les numéros correspondent. (En  $\text{\LaTeX}$ , vous pouvez utiliser la commande `\section*`.)

## FAQ

**Comment on s'organise concrètement ?** Ceci varie fortement d'une équipe à l'autre, on peut donner ici quelques exemples :

- se voir, l'équipe entière, une heure ou deux par semaine ;
- se voir, par petit groupe qui veulent parler d'un problème particulier ;
- avoir une plate-forme d'échange, et se voir de manière plus espacée ;
- se voir parfois avec les encadrants, parfois sans les encadrants ;
- se voir au lycée, chez l'un des participants, dans un parc, où vous voulez.

**Quelle est la différence entre « donc » et le symbole mathématique «  $\implies$  » ?** Ils ont des sens distincts :

- «  $P$  donc  $Q$  » signifie « puisque  $P$  est vrai,  $Q$  est également vrai » (les deux sont donc vrais) ;
- «  $P \implies Q$  » signifie « si  $P$  est vrai, alors  $Q$  est également vrai » (il est également possible que  $P$  et  $Q$  soient tous les deux faux, ou que  $Q$  soit vrai mais pas  $P$ ).

**Proposer des programmes informatiques est-il valorisé ?** Seulement s'ils sont pertinents et ne dissimulent pas un manque de contenu mathématique. Si vous ne parvenez pas à traiter une question, proposer un programme naïf qui la résout n'est pas forcément une bonne idée. En général, les programmes sont intéressants dans trois cas :

- soit parce qu'une idée mathématique est exploitée à travers l'algorithme (c'est alors plutôt l'idée qui est valorisée) ;
- soit parce que vous avez résolu mathématiquement presque tous les cas, et que le programme sert à traiter les quelques-uns restants afin de compléter la réponse ;
- soit parce que le programme vous permet d'observer des phénomènes et d'appuyer des conjectures ;

Dans ces cas, pensez à expliquer l'algorithme dans la solution et éventuellement inclure un lien vers le code (il est inutile de faire figurer le code dans la solution écrite). En revanche, veillez à être capable d'exécuter l'algorithme sur votre ordinateur pendant l'oral si besoin.

**Si une question comporte plusieurs cas particuliers, puis-je me contenter de traiter le cas général ou dois-je expliciter tous les cas ?** Le cas général suffit, en théorie. S'il est parfaitement clair et explicite que le cas général englobe d'autres questions, le jury considérera qu'elles ont toutes été résolues. Toutefois il est important de garder à l'esprit que la solution doit être compréhensible. Or, dans certains cas, l'étude de certains cas particuliers peut beaucoup aider à la compréhension du cas général.

**Est-il possible de répondre à des questions autres que celles proposées dans la liste des problèmes ?** Pourquoi pas, sous certaines conditions. Vous pouvez vous écarter des questions posées par le problème si cela vous permet de proposer un résultat intéressant et pertinent (solution à un problème plus compliqué, à un problème similaire, ou à un problème plus simple si la question initiale n'a pas été résolue). Toutefois, tout nouveau problème doit être étroitement lié au problème initial et il doit être évident que l'équipe a fait de son mieux pour résoudre le problème initial. Le jury saura juger de la pertinence de ce choix.

**Que demander à mon encadrant ?** Tout, sauf de réfléchir à votre place. L'organisation varie fortement d'une équipe à l'autre. De manière générale, le rôle principal de l'encadrant est de vous manager du point de vue technique (organiser des rencontres, réserver une salle, etc.), ainsi que de s'intéresser à vos solutions pour vérifier que vos idées tiennent la route. Il peut également vous fournir des explications si vous sentez qu'un outil vous manque pour faire face à une difficulté technique particulière. Enfin, il peut souvent vous aider à maîtriser  $\text{\LaTeX}$  (voir plus haut).