$\mathbb{TFJM}^2$

Problèmes du 17ème Tournoi Français des Jeunes Mathématiciennes et Mathématiciens

VERSION PRÉLIMINAIRE MISE À JOUR LE 4 NOVEMBRE 2026

Préambule

Ces problèmes sont difficiles et sont proposés par des chercheurs et étudiants en mathématiques. Ils n'admettent pas toujours, à la connaissance du jury, de solution complète mais sont accessibles à des lycéens, c'est-à-dire que les auteurs sont certains qu'un travail de recherche élémentaire peut être mené sur ces problèmes. Le jury n'attend pas des candidats qu'ils résolvent entièrement un problème, mais qu'ils en comprennent les enjeux, résolvent des cas particuliers, repèrent les difficultés et proposent des pistes de recherche. Attention, les questions ne sont pas toujours classées par ordre croissant de difficulté. Enfin, il n'est pas nécessaire de traiter tous les problèmes : chaque équipe peut en refuser un certain nombre sans pénalité. On se reportera au règlement pour plus de détails.

Ces problèmes sont distribués sous licence `CC-BY-SA 4.0`. En cas de questions concernant le tournoi ou les énoncés, consulter le site `www.tfjm.org` ou contacter les organisateurs à l'adresse `contact@tfjm.org`.

Table des matières

Préambule 1
Notations 1
1. Chaises musicales au restaurant 2
2. Dés personnalisés 4
3. La couturière de vérité 5
4. Triskaïdékaphobie 6
5. Perdus en forêt 7
Quelques formulations fréquentes 8

Mots-clés :
1. Permutations, graphes 2. Probabilités 3. Graphes, combinatoire
4. Arithmétique, algèbre 5. Géométrie

Notations

$\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$	ensemble contenant les éléments $a_1, a_2, \ldots, a_n$
$[\![a; b]\!]$	ensemble contenant les nombres entiers de a à b, autrement dit $[a; b] \cap \mathbb{N}$
$\mathbb{N}$	ensemble des nombres entier naturels
$\mathbb{N}^*$	ensemble des nombres entier naturels non-nuls
$\mathbb{R}$	ensemble des nombres réels
$A \setminus B$	ensemble A auquel on a retiré les éléments de l'ensemble B

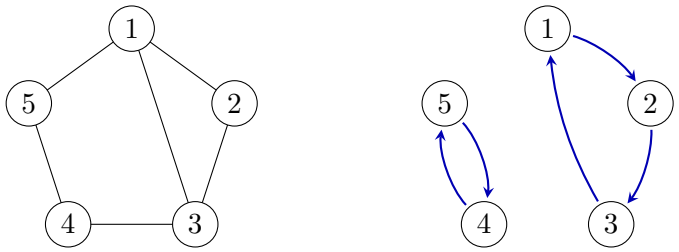
1. CHAISES MUSICALES AU RESTAURANT

Bienvenue à La Table Tournoyante ! Dans ce restaurant un peu particulier, Fabien, le chef de salle, installe $n \geqslant 2$ sièges et y place n convives lors de grands repas : son restaurant est toujours complet !

Certaines paires de sièges sont suffisamment proches pour permettre aux personnes assises de discuter. Fabien dresse ainsi un **plan de table**, fixé pour tout le repas, indiquant quelles paires de sièges sont **reliées**.

Pour rendre le repas plus distrayant, Fabien choisit également une **consigne de rotation**, fixée avant le repas et la même pour toute la soirée. À chaque siège, il associe un siège d'arrivée (éventuellement le même), de manière à ce que deux sièges différents aient toujours deux sièges d'arrivée différents. Entre deux plats servis, chaque convive doit alors se lever et aller s'asseoir au siège d'arrivée du siège qu'il occupait.

Pendant un plat, deux convives discutent lorsque leurs sièges sont reliés sur le plan de table choisi par Fabien. On dit que le repas est **convivial** si chaque paire de convives a discuté au moins une fois au cours du repas. Chaque soir de la semaine, Fabien essaie une nouvelle organisation.



Plan de table Consigne de rotation

FIGURE 1 – Un exemple avec $n = 5$. Au premier plat, l'occupant du siège 1 discute avec ceux des sièges 2, 3 et 5. Entre deux plats, l'occupant du siège 1 va au siège 2, celui du siège 2 au siège 3, celui du siège 3 au siège 1, et ceux des sièges 4 et 5 échangent leurs places.

1. Le soir de l'inauguration, et dans cette question seulement, $n = 6$ convives sont installés autour d'une table ronde : chacun ne peut discuter qu'avec ses deux voisins immédiats, à droite et à gauche.

a) Entre deux plats, tout le monde se décale d'un siège vers la droite. Avec combien de personnes chaque convive aura-t-il discuté à la fin du repas (constitué de 10 plats) ?

b) Fabien veut à tout prix rendre son repas convivial et il peut choisir la consigne de rotation qu'il veut. Combien de plat lui faudra-t-il servir au minimum pour cela ?

2. À partir de cette question, n est un entier quelconque. Pour la soirée de lundi, Fabien installe dans le restaurant une table avec un siège central, dont l'occupant peut discuter avec tous les autres, tandis que les autres convives, eux, ne peuvent discuter qu'avec lui. Existe-t-il une consigne de rotation qui rende le repas convivial ? Si oui, combien de plats faut-il au minimum ?

On dit qu'une consigne de rotation est une **grande ronde** si l'on peut numéroter les sièges $s_1, s_2, \ldots, s_n$ de sorte que chaque convive passe du siège s_i au siège s_{i+1}, pour i allant de 1 à $n-1$, et du siège s_n au siège s_1.

3. Fabien trouve finalement la table de la veille encombrante. Avant le repas du mardi, il décide donc d'éloigner certains sièges du siège central : l'occupant d'un siège éloigné ne peut alors malheureusement plus discuter avec personne pendant un plat, mais il continue à changer de place comme auparavant. La consigne de rotation choisie ici est une grande ronde, qui passe par tous les sièges, siège central compris.

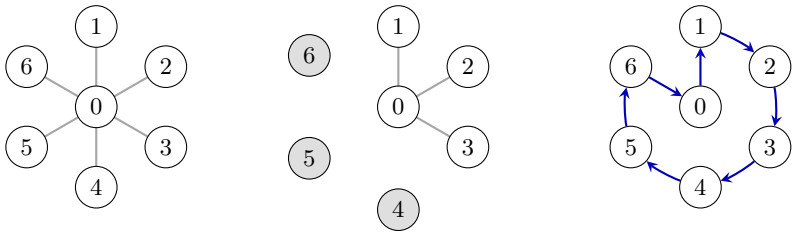


FIGURE 2 – Table avec $n = 7$ sièges où le siège central porte le numéro 0. À gauche, la table de la question précédente ; au milieu, après que Fabien a éloigné les sièges 4, 5 et 6 ; à droite, une grande ronde pour ces tables $0 \to 1 \to 2 \to \cdots \to 6 \to 0$.

a) Combien de sièges Fabien peut-il éloigner au maximum tout en gardant un repas convivial ?

b) Parmi les plans de tables avec ce nombre maximal de sièges éloignés, quel est le nombre minimal de plats qu'il a besoin de servir (en choisissant une grande ronde qui minimise ce nombre) ?

4. Pour le repas de mercredi, Fabien teste un plan de table et une consigne de rotation quelconque, sans les choisir spécifiquement pour que le repas soit convivial. Il aimerait savoir à partir de quel moment il peut arrêter de servir des plats, en étant sûr de ne pas empêcher un repas de devenir convivial.

En fonction de n, quel est le nombre minimal p de plat à servir pour que tout repas à n convives potentiellement convivial le soit après p plats ?

5. Fabien se réveille jeudi de très mauvaise humeur et supporte mal le bruit : il veut organiser le plan de table de sorte qu'il y ait le moins de discussions possible simultanément, c'est-à-dire le moins de paires de sièges reliées. Il veut de plus vider la salle au bout de k plats au plus ! Il ne veut néanmoins pas gâcher la prestigieuse réputation de son restaurant, donc le repas doit rester convivial. Fabien choisit aussi librement la consigne de rotation. Combien de paires reliées doit-il prévoir au minimum ? On pourra commencer par $n = 6$ et $k = 3$.

6. Pour bien finir la semaine, Fabien veut s'amuser : le vendredi soir, il transforme le repas en jeu de chaises musicales ! Il choisit toujours une consigne de rotation pour toute la soirée, mais maintenant, avant chaque changement de place, il peut demander à certains convives de rester assis. Les autres se lèvent et suivent la consigne : si leur siège d'arrivée est occupé par un convive resté assis, ils continuent vers le siège d'arrivée de ce siège, et ainsi de suite, jusqu'à tomber sur un siège dont l'occupant s'est levé.

Grâce à cette liberté, un repas qui ne pouvait pas être convivial peut-il le devenir ? Combien de plats faut-il alors au minimum ? On pourra reprendre les tables des questions 1 et 3.

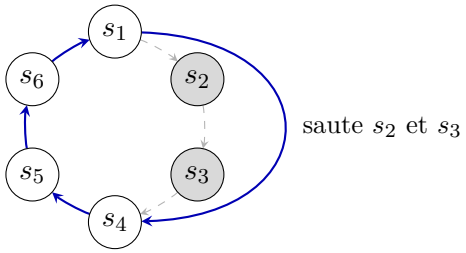


FIGURE 3 – Les convives de s_2 et s_3 (en gris) restent assis. Les autres suivent la grande ronde $s_1 \to s_2 \to \cdots \to s_6 \to s_1$ (pointillés) en sautant les sièges occupés : celui de s_1 va en s_4, ceux de s_4, s_5, s_6 vont en s_5, s_6, s_1.

Question complémentaire. Proposer et étudier d'autres pistes de recherche.

* * *

2. DÉS PERSONNALISÉS

– La finale du championnat du monde de lancer de dés voit s'opposer les 2 plus grandes légendes du XXIe siècle. A ma gauche, Léo, et son dé à 6 faces fétiche, dont les faces sont $(1,2,3,5,8,13)$. A ma droite, Théo, qui arrive avec un dé à 4 faces spécialement construit pour l'occasion : $(0,2,10,10)$.

Les règles sont simples : chacun lance son dé, le plus grand résultat l'emporte. En cas d'égalité, cela compte pour chacun comme une demi-victoire (ou, de manière équivalente, le gagnant est tiré au sort).

L'espérance du dé de Léo vaut $E_L = \frac{16}{3}$, ce qui est légèrement inférieur au dé de Théo avec $E_T = 5,5$. Mais cela suffira-t-il à donner l'avantage à Théo ? Vos pronostics, Jean-Pierre ?

– Oui Michel, j'ai fait quelques calculs de mon côté, et j'ai trouvé que Léo gagne avec une probabilité $\frac{12}{24}$, Théo avec une probabilité $\frac{11}{24}$, et il y aura égalité avec probabilité $\frac{1}{24}$. Autrement dit, le score de Léo vaut $S_L = \frac{25}{48}$ et celui de Théo vaut $S_T = \frac{23}{48}$. Il semblerait que Léo soit favori dans l'affrontement titanesque qui s'annonce !

En fonction du dé équilibré à N_L faces et d'espérance E_L de Léo, modélisé par une variable aléatoire X_L, et du dé équilibré à N_T faces et d'espérance E_T de Théo, modélisé par une variable aléatoire X_T (indépendante de X_L), on définit ainsi le **score** de Léo comme $S_L = P(X_L > X_T) + \frac{1}{2}P(X_L = X_T)$, et le **score** de Théo comme $S_T = P(X_T > X_L) + \frac{1}{2}P(X_T = X_L)$ (de sorte que $S_L + S_T = 1$).

Pour les deux joueurs, les faces doivent être des nombre entiers naturels.

1. Dans cette question, on suppose que le dé de Léo est le dé $(2,2,5)$ (donc $N_L = 3$ et $E_L = 3$). Parmi les dés pour Théo avec $N_L = 3$ et $E_T = 3$, quel est :

a) Le pire score S_T possible ?

b) Le meilleur score S_T possible ?

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Jean-Pierre et Michel veulent un match intéressant : ils créent eux-même les dés de Léo et Théo à $N_L = N_T = n$ faces, en leur répartissant les nombres compris entre 1 et $2n$, une fois chacun.

Quels sont les scores les plus équilibrés (autrement dit, proches de $\frac{1}{2}$) qu'ils puissent obtenir ?

3. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $e \in \mathbb{N}$. Les règles du tournois imposent aux participants de choisir des dés tels que $N_L = N_T = n$ et $E_L = E_T = e$.

Léo est en train de préparer son dé, mais il sait que Théo triche : Théo va regarder le dé de Léo et, en fonction, créer le meilleur dé possible contre lui.

Sachant cela, déterminer le meilleur score que peut s'assurer Léo :

a) En supposant $e = 1$.

b) En supposant $n = 2e + 1$.

c) Dans le cas général. On cherchera en particulier des conditions pour que le score de Léo soit $\frac{1}{2}$.

4. Reprendre la question 3.c dans le cas où le règlement impose que les faces des dés comportent des puissances de 2. Il est autorisé que l'espérance soit inférieure à e plutôt que de lui être exactement égale.

5. Reprendre la question 3.c dans le cas où N_L, N_T, E_L et E_T sont encore imposés à l'avance, mais pas forcément égaux entre eux.

Question complémentaire. Proposer et étudier d'autres directions de recherche.

* * *

3. La couturière de vérité

$n \geq 3$ joueurs jouent à un jeu à identité secrète. Deux camp s'affrontent : $m \in [\![1; n-2]\!]$ méchants et $n-m$ gentils.

Chaque gentil reçoit de la part du meneur de jeu une information constituée d'une paire de joueurs (autres qu'eux-même), parmi lesquels exactement un joueur est gentil et l'autre méchant (mais il ne sait pas lequel est lequel).

Les joueurs partagent publiquement leurs informations : les gentils disent la vérité, et les méchants inventent une information qui peut être vraie ou fausse. On appelle **configuration** la donnée de ces informations.

Par exemple, pour $n = 5$ et $m = 1$, on peut considérer la configuration où A donne l'information (B,C), B l'information (D,E), C l'information (B,D), D l'information (A,B) et E l'information (A,B) également (voir Fig. 4). La seule possibilité est alors que B soit le méchant.

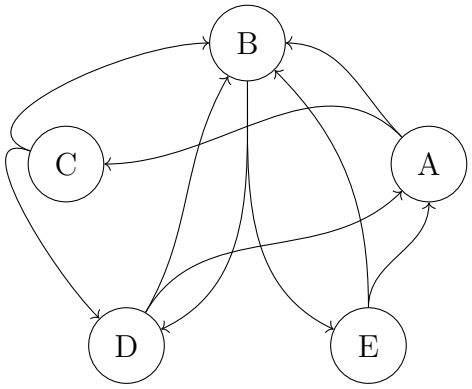


FIGURE 4 – Exemple de configuration avec $n = 5$ et $m = 1$, pour laquelle le seul méchant possible est B.

1. Dans cette question, on fixe $n = 5$ et $m = 1$.

La configuration de l'exemple introductif illustre qu'il existe une configuration pour laquelle exactement 1 joueur peut être le méchant.

Existe-t-il une configuration impossible ? Une configuration telle que 2 joueurs pourraient chacun être le méchant ? Telle que 3 joueurs pourraient chacun être le méchant ?

2. En fonction de n, existe-t-il une valeur de m et une configuration qui vérifie les deux conditions suivantes ?

— D'un point de vue extérieur à la partie, il est impossible de connaître un gentil de manière certaine.

— Du point de vue de chacun des gentils (avec l'information qu'il est lui-même gentil), il est possible d'identifier l'ensemble des méchants.

3. Reprendre la question précédente, où la première condition est plutôt qu'il est impossible de connaître un *méchant* de manière certaine.

Dans le reste du problème, on considère toujours le point de vue extérieur à la partie. Dans chacune des questions suivantes, on pourra commencer par les cas particuliers $m = 1$ puis $m = 2$.

4. En fonction de n et de m, existe-t-il une configuration qui permet d'identifier l'ensemble des méchants ?

5. En fonction de n et de m, existe-t-il une manière pour le meneur de choisir les informations qu'il donne aux gentils pour que, quels que soient les mensonges inventés par les méchants, on obtient une configuration où il est possible d'identifier l'ensemble des méchants ?

6. Dans cette question, parmi les gentils, $c \in [\![1; n-m]\!]$ sont confus, et donnent une information nécessairement erronée. Autrement dit, leur information est constituée soit de 2 gentils, soit de 2 méchants. Les gentils ne savent pas s'ils sont confus ou non, seul le nombre total de gentils confus est connu. On suppose par ailleurs $n \geq 4$.

En fonction de n, m et c, existe-t-il une configuration qui permet d'identifier l'ensemble des méchants ?

Question complémentaire. Proposer et étudier d'autres pistes de recherche.

* * *

4. TRISKAÏDÉKAPHOBIE

Alexandrianna est triskaïdékaphobe, ce qui signifie qu'elle a la phobie du nombre 13. D'ailleurs, elle préfère qu'on l'appelle Alex. Mais sa phobie ne s'arrête pas là : elle a aussi la phobie de tous les multiples du nombre 13. Elle a donc très peur, sur la Figure 5, de la grille de gauche, qui contient 3 multiples de 13. Mais la grille de droite ne lui fait ni chaud ni froid.

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & 7 \\ 3 & 2 & 9 \\ 5 & 4 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \\ 6 & 9 & 3 \end{pmatrix}$$

FIGURE 5 – A gauche : une grille avec 3 multiples de 13 : 26 (horizontal), 624 (vertical) et 0. Cette 3-grille n'est donc pas 13-libre.
A droite : une grille sans multiple de 13. Cette 3-grille est donc 13-libre.

Plus généralement, soit $d \geq 2$ et $n \geq 2$ deux entiers naturels.

Un grille de chiffres de taille n par n (appelée n-grille) est dite **d-libre** si elle ne contient aucun multiple de d, en lisant les nombres soit horizontalement de gauche à droite, soit verticalement de haut en bas.

(Alex a donc peur des grilles qui ne sont pas 13-libres.)

1.

a) Dans cette sous-question, on fixe $d = 2$. Pour quelles valeurs de n existe-t-il une n-grille 2-libre ?

b) Dans cette sous-question, on fixe $d = 3$. Pour quelles valeurs de n existe-t-il une n-grille 3-libre ?

2. Dans cette question, on fixe $d = 11$.

a) Pour quelles valeurs de n existe-t-il une n-grille 11-libre ?

b) Pour quelles valeurs de n existe-t-il une n-grille 11-libre, en imposant que chaque chiffre soit utilisé au plus 10 fois ?

c) Pour quelles valeurs de n existe-t-il une n-grille 11-libre, en imposant que les chiffres soient pairs une ligne sur 2, et impairs l'autre ?

3. En fonction de d et n, existe-t-il une n-grille d-libre ?

4. Reprendre la question précédente si, en plus des nombres lus horizontalement de gauche à droite et verticalement de haut en bas, on s'intéresse à :

a) Tous les nombres lus diagonalement de haut-gauche à bas-droite. *Par exemple, avec cette définition, la grille de droite de la Figure 5 n'est pas non plus* 13*-libre, car on peut former le nombre* 13 *en bas à droite.*

b) Tous les nombres que l'on peut lire en suivant les chiffres de manière contigüe dans les 4 directions, sans repasser 2 fois au même endroit dans la grille. *Par exemple, avec cette définition, la grille de droite de la Figure 5 n'est pas non plus* 13*-libre, car on peut former le nombre* 13 *en utilisant la première ligne, ou encore le nombre* 169 *en utilisant les chiffres en bas à gauche.*

Question complémentaire. Proposer et étudier d'autres directions de recherche.

* * *

5. PERDUS EN FORÊT

Deux amis, Oscar et Inès se baladent en forêt. Des mésaventures leurs arrivent, et ils se perdent de vue. Comment vont-ils faire pour se retrouver ?

On modélise la forêt par le plan $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère orthonormé dont Oscar sert d'origine. Au début du problème, un arbre est assimilé à un point (un tronc infiniment fin), et on note A l'ensemble des coordonnées des arbres dans le repère orthonormé.
Les coordonnées d'Inès sont notées $(a;b) \in \mathbb{R}^2 \setminus A$.

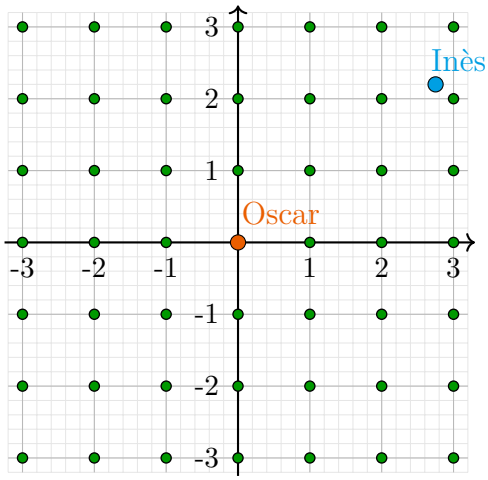


FIGURE 6 – Exemple d'une forêt où $A = \mathbb{N}^2 \setminus \{(0;0)\}$

On dit qu'Inès est **cachée** s'il y a au moins un arbre sur le segment reliant Oscar et Inès. On dit qu'Inès est **visible** sinon.

1. Dans cette question, $A = \mathbb{N}^2 \setminus \{(0;0)\}$. Autrement dit, il y a un arbre à chaque coordonnées entières, sauf à l'origine (voir Fig. 6).

Donner des conditions sur $(a;b)$ pour qu'Inès soit visible.

2. Dans cette question, A décrit les sommets de triangles équilatéraux de côté unité qui pavent le plan à partir des points de coordonnées $(1;0)$ et $(2;0)$ (à l'exception de l'origine) (voir Fig. 7).

Donner des conditions sur $(a;b)$ pour qu'Inès soit visible.

Dans certaines questions de la suite du problème, on suppose que les arbres ont un tronc circulaire et une écorce qui laisse suffisamment passer la lumière.

On note toujours A l'ensemble des centres des troncs, et on note T l'ensemble des points t tel qu'il existe un arbre a_i de rayon r_i tel que la distance entre t et a_i soit strictement inférieure à r_i. Formellement :

$$T = \{t \mid \exists i, d(t, a_i) < r_i\}$$

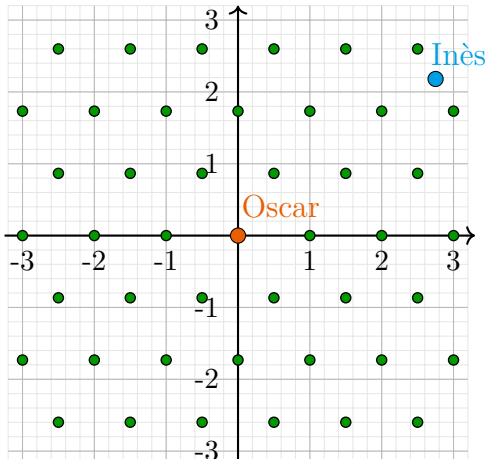


FIGURE 7 – Illustration de la forêt formé de triangles équilatéraux unitaires.

L'espace laissé libre est alors $\mathbb{R}^2 \setminus T$.

3. Dans cette question, $A = \mathbb{N}^2 \setminus \{(0;0)\}$, et tous les arbres ont le même rayon $r > 0$. En fonction de $r > 0$, tel que les arbres ne se touchent pas, déterminer la plus grande distance à laquelle peut se trouver Inès qui soit visible.

Maintenant, ils savent chacun où se trouve leur ami et veulent se rejoindre. On dira qu'Oscar et Inès peuvent se rejoindre en **zig-zag** s'il existe un chemin constitué d'un enchaînement fini de segments rectilignes qui ne contient aucun arbre, et dont le point de départ est la position d'Oscar (l'origine) et le point d'arrivée est la position $(a;b)$ d'Inès.

4. Dans cette question, $A = \mathbb{Q}^2 \setminus \{(0;0),(a;b)\}$ (et les troncs sont d'épaisseur nulle).

En fonction de $(a;b)$, Oscar et Inès peuvent-ils se rejoindre en zig-zag ? Si oui, en combien de segments au minimum ?

5. Dans cette question, $A = \mathbb{N}^2 \setminus \{(0;0)\}$

Soit $s,t \in]0;1[$. Les troncs alternent en quinconce des troncs de rayon s et t : l'arbre de centre $(p;q)$ a pour rayon s si $p+q$ est pair et t si $p+q$ est impair (voir Fig. 8).

En fonction de s et de t, déterminer la plus grande distance d'Oscar à laquelle peut se trouver Inès telle qu'Oscar puisse la rejoindre en zig-zag avec au maximum n segments. On pourra commencer par les cas $n = 1$, $n = 2$ et $n = 3$.

Question complémentaire. Proposer et étudier d'autres pistes de recherche.

* * *

QUELQUES FORMULATIONS FRÉQUENTES

Déterminer (ou encadrer aussi précisément que possible) [telle quantité].
Pour répondre parfaitement à la question, il faut déterminer la valeur exacte. Néanmoins, si c'est trop difficile, une réponse partielle peut consister à trouver un minorant aussi grand que possible, et un majorant aussi petit que possible. Par exemple, si vous conjecturez que $f(n) = n^3$, démontrer que $n^2 < f(n) < 2n^3$ peut déjà être intéressant. Cela s'applique également pour une question dont l'énoncé est plutôt "**Estimer [telle quantité].**", ou même simplement "**Déterminer [telle quantité].**".

Soit $n \in \mathbb{N}$. [telle question]. (ou toute autre variable introduite en début de question ou de partie)
Il s'agit de répondre à la question en fonction de n. Pour répondre parfaitement à la question, la réponse doit couvrir toutes les valeurs possibles.

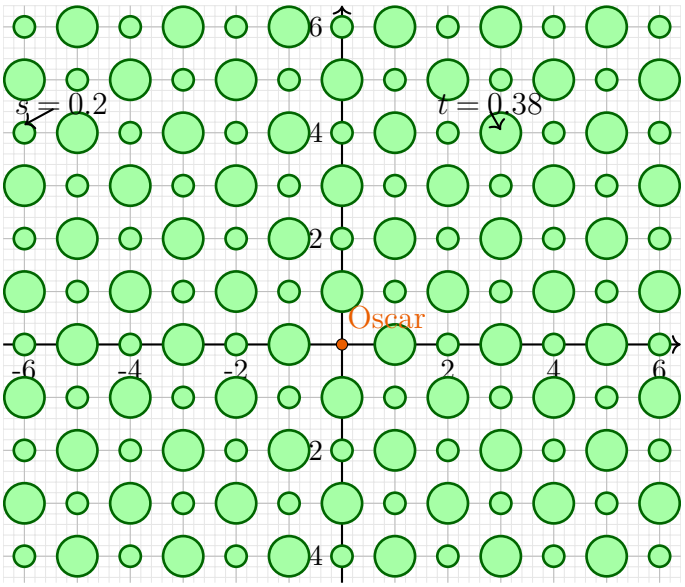


FIGURE 8 – Exemple de forêt avec deux types de troncs ($s = 0.2$ et $t = 0.38$).

Néanmoins, une réponse partielle (par exemple : seulement pour les valeurs de n qui sont des nombres premiers) peut déjà être intéressante.

Quel score [telle joueuse] peut-elle obtenir, quelle que soit la manière de jouer de son adversaire ?
Pour répondre à la question, il faut s'assurer de proposer une stratégie qui fonctionne non seulement si l'adversaire effectue des coups qui semblent logique, mais bien quels que soient les coups qu'il effectue.

En particulier, dans un jeu fini déterministe au tour par tour où deux joueuses sont opposés, une joueuse a une stratégie gagnante si et seulement si son adversaire n'a pas de stratégie non-perdante.

Trouver des conditions pour [tel énoncé].
Il existe deux types de conditions :

- D'une part, il peut être intéressant de trouver des conditions suffisantes : si elles sont vérifiées, alors l'énoncé est correct. Une condition suffisante est d'autant plus intéressante qu'elle est peu restrictive. (Par exemple, démontrer que l'énoncé est correct pour tout n pair est plus intéressant que de démontrer qu'il est correct pour tout n multiple de 4.)
- D'autre part, il peut être intéressant de trouver des conditions nécessaires : si l'énoncé est correct, alors elles sont vérifiées.
  Une condition nécessaire est d'autant plus intéressante qu'elle est restrictive. (Par exemple, démontrer que l'énoncé est correct seulement pour des n multiples de 4 est plus intéressant que de démontrer qu'il est correct seulement pour des n pairs.)

L'idéal est de trouver un ensemble de conditions à la fois nécessaires et suffisantes : l'énoncé est correct si et seulement si elles sont vérifiées.

Proposer et étudier d'autres pistes de recherche.
Cette question est complémentaire et largement facultative. Les pistes de recherche doivent être étroitement liées au problème initial.
Ce qui a de la valeur n'est pas le fait de proposer des pistes de recherche en soi, mais bien de trouver des raisonnements intéressants pour les étudier.